

Università degli Studi di Padova



Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

**APPUNTI DEL CORSO
"CAMPI ELETTROMAGNETICI"**

DI

LEONARDO PACCIANI MORI

Anno accademico 2014-2015

Questo materiale è rilasciato sotto la licenza *Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale*



Ciò significa che questo materiale può essere liberamente modificato e ridistribuito, a patto di citare la fonte, rilasciarlo sempre sotto questa licenza e di non usarlo per scopi commerciali.

Luglio 2016

Introduzione

Questo documento è la trascrizione dei miei appunti del corso *Campi elettromagnetici*, tenuto dal prof. Stefano Giusto per il terzo anno del Corso di Laurea in Fisica presso il dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei” dell’Università degli Studi di Padova durante l’anno accademico 2014-2015.

Come tale, non è un documento con molte pretese di completezza o di forma. Solo per fare un esempio, per non perdere troppo tempo e energie ho disegnato a mano le figure presenti nel documento. Date le mie *limitatissime* capacità grafiche, molte non sono venute un granché; spero solo che siano perlomeno comprensibili.

Ho deciso di rilasciare questi appunti insieme al loro codice sorgente \LaTeX , di modo che chiunque possa eventualmente modificarli a seconda delle proprie esigenze. Il materiale (compresi gli appunti di altri corsi) si trova tutto su leonardo.pm/teaching.

La licenza sotto la quale questo documento è rilasciato è la *Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale*. In sintesi, ciò significa che questo documento (incluso il suo codice sorgente) può essere modificato e ridistribuito liberamente, a condizione che sia sempre citata la fonte del documento originale, che sia rilasciato sempre sotto questa licenza e che non venga utilizzato per scopi commerciali o di lucro.

Non è escluso che ci possano essere degli errori, qua e là, anche se ho cercato di essere il più meticoloso possibile nel scovarli. In caso, mi scuso anticipatamente.

Ringrazio anche tutti coloro che mi hanno aiutato a correggere questo documento segnalandomi errori e sviste.

Padova, Febbraio 2015
Leonardo Pacciani Mori

Ho rifatto tutte le immagini del documento di modo da renderle più comprensibili ed esteticamente soddisfacenti, e corretto qualche sporadico errore.

Ho inoltre deciso di usare questi appunti per formare il corso di *Elettrodinamica Classica* su WikiToLearn, che è un sito web nel quale gli utenti possono creare libri di testo e materiale di studio collaborativamente; ho deciso di farlo perché la filosofia di questa comunità rispecchia perfettamente le ragioni per le quali ho deciso di scrivere questo documento. Incoraggio fortemente chiunque voglia correggere o migliorare il materiale contenuto in questo documento di farlo direttamente su WikiToLearn, e magari anche partecipare alle attività della comunità.

Padova, Luglio 2016
Leonardo Pacciani Mori

Informazioni sul corso

DOCENTE: STEFANO GIUSTO

SITO WEB: <http://www.pd.infn.it/~giusto/CE15.html>

E-MAIL: stefano.giusto@pd.infn.it

Presentazione

È un corso sull'elettromagnetismo classico (nel senso di non quantistico), che ne enfatizza gli aspetti relativistici. L'elettromagnetismo è infatti prima di tutto una *teoria relativistica*, ed è anche una *teoria di campo* (ossia una teoria che descrive interazioni fra particelle attraverso il concetto di *campo*); una teoria relativistica, non a caso, non può non essere una teoria di campo, altrimenti si violerebbe il principio di relatività, ossia sarebbe possibile che dell'informazione si propaghi a velocità maggiori di quella della luce nel vuoto. È anche una *teoria unificata*, ossia una teoria che permette di descrivere con un unico formalismo fenomeni apparentemente molto diversi (i fenomeni elettrici e quelli magnetici). È infine una *teoria di gauge*: ciò significa che esprimendo i campi coinvolti tramite potenziali, questi non sono univocamente determinati. Fenomenologicamente, è anche il tipo di interazione più rilevante nella vita quotidiana.

In questo corso, imparando i metodi dell'elettromagnetismo classico acquisiremo strumenti generali per la descrizione di una qualunque teoria che descriva interazioni fra particelle elementari: utilizzeremo l'elettromagnetismo classico come strumento per imparare “come funziona” una generica teoria di campo.

Ciò che ci prefiggiamo di capire, fondamentalmente, è come i campi elettromagnetici influenzino il moto delle particelle cariche, e viceversa quale sia il campo generato da una particella carica in moto qualunque; vedremo in realtà che questi due “problemi” sono interconnessi, poiché il moto di una particella carica è influenzato anche dal campo prodotto dalla carica stessa.

Programma

Il programma del corso è, a grandi linee, il seguente:

- Prima parte
 - Ripasso di relatività ristretta: il calcolo tensoriale
 - Equazioni dell'elettromagnetismo in formalismo covariante \Rightarrow principi di conservazione
 - Metodo variazionale per una teoria di campo \Rightarrow teorema di Noether
 - Equazioni dell'elettromagnetismo nel vuoto: le onde elettromagnetiche
 - Equazioni dell'elettromagnetismo in presenza di sorgenti cariche: i campi di Lienard-Wiechert
 - Irraggiamento elettromagnetico
- Seconda parte
 - Approssimazione non-relativistica ($v \ll c$) delle formule generali (“sviluppo in multipoli”: irraggiamento dell'atomo di idrogeno, diffusione Thomson)

- Caso ultra-relativistico ($v \sim c$) (irraggiamento in acceleratori di particelle)
 - Analisi spettrale dell'energia irradiata
 - Effetto Čerenkov
- Terza parte
 - Reazione di radiazione
 - Monopoli magnetici

Materiale

Sul sito web si trovano le dispense del corso. Queste sono state pubblicate sotto forma di libro, in “Elettrodinamica classica” di Kurt Lechner. Altri testi consigliati sono “Teoria dei campi, vol 2” di Landau-Lifshitz (completissimo ma un po' condensato), e “Elettrodinamica classica” di Jackson (buono per esercizi, forse un po' dispersivo).

Ogni settimana verranno assegnati sul sito web esercizi da svolgere.

Esame

È *solo* orale, e la prima domanda è *sempre* un esercizio da risolvere alla lavagna. Non ci si aspetta che ci si ricordi nessuna formula a memoria, ma si devono saper ricavare i risultati.

Altre informazioni

Il ricevimento è mercoledì dalle 14:15 alle 15:00.

Eventualmente, più in là nel corso si potranno fissare alcune ore aggiuntive per discutere di esercizi.

Indice

1	Richiami di relatività ristretta	2
1.1	La non invarianza delle equazioni di Maxwell	2
1.2	I postulati della relatività ristretta e il formalismo covariante	4
1.3	Tensori e campi tensoriali	6
1.3.1	I tensori	6
1.3.2	Campi tensoriali	8
1.4	I gruppi di Poincaré e di Lorentz	9
1.4.1	Le trasformazioni infinitesime	10
1.5	Cinematica relativistica	11
1.5.1	Le grandezze del moto	11
1.5.2	L'equazione del moto	12
1.5.3	Problema di Cauchy per le equazioni del moto	13
1.5.4	Le distribuzioni in elettromagnetismo e le leggi di conservazione	16
1.5.5	La quadricorrente	17
1.5.6	Le leggi di conservazione	18
2	Il metodo variazionale	24
2.1	Variazioni ed equazioni del moto	24
2.1.1	Sistema con gradi di libertà finiti	24
2.1.2	Sistema con gradi di libertà infiniti	24
2.2	La lagrangiana dell'elettrodinamica	26
2.2.1	Azione di una particella libera	26
2.2.2	Azione del campo elettromagnetico libero	27
2.2.3	Azione d'interazione campo-particella	28
2.2.4	Azione totale dell'elettrodinamica	29
2.3	Il teorema di Noether	29
2.3.1	Simmetrie interne e esterne	31
3	Soluzioni delle equazioni di Maxwell	38
3.1	Problema di Cauchy	38
3.2	Equazioni di Maxwell nel vuoto	40
3.2.1	Soluzioni dell'equazione di d'Alembert	40
3.2.2	Soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto: le <i>onde elettromagnetiche</i>	42
3.2.3	Espressione esplicita dei campi in un'onda elettromagnetica	43
3.2.4	Effetto Doppler relativistico	50
3.3	Equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti	52
3.3.1	Il metodo della funzione di Green	52
3.3.2	Soluzione delle equazioni di Maxwell	57
4	Campo elettromagnetico di una carica in moto qualunque	58
4.1	Potenziale di Lienard-Wiechert	58
4.1.1	Espressione esplicita dei campi	61
4.1.2	Campo di una carica in moto uniforme	63

4.2	L'irraggiamento	65
4.2.1	Campo nella zona delle onde	67
4.3	Sviluppo in multipoli	68
4.3.1	Approssimazione di dipolo	69
4.4	Diffusione (o scattering) Thomson	71
4.4.1	L'atomo di idrogeno	76
4.5	Approssimazione di quadrupolo	77
4.6	Irraggiamento ultrarelativistico	79
4.6.1	Acceleratori di particelle	80
4.6.2	Distribuzione angolare	82
4.7	Analisi spettrale	84
4.8	Effetto Čerenkov	87
5	Argomenti finali	91
5.1	Reazione di radiazione	91
5.1.1	Le divergenze ultraviolette	92
5.1.2	La rinormalizzazione	92
5.1.3	L'equazione di Lorentz-Dirac e le sue conseguenze	94
5.2	Monopoli magnetici	95
5.2.1	La dualità elettromagnetica e le sue conseguenze	95
5.2.2	La quantizzazione delle cariche	97

Capitolo 1

Richiami di relatività ristretta

1.1 La non invarianza delle equazioni di Maxwell

In questo corso utilizzeremo il cosiddetto *sistema di unità di misura di Gauss razionalizzato*. Con questa scelta, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{c}$$

Notare che, in questo sistema, i campi elettrico e magnetico hanno la stessa unità di misura¹. L'equazione per la forza di Lorentz, invece, è:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Possiamo vedere anche da quest'ultima equazione che \vec{E} e \vec{B} hanno la stessa unità di misura: \vec{v}/c è infatti un termine adimensionale; inoltre, sfruttando quest'equazione possiamo ricavare l'espressione della carica in funzione di altre unità di misura del Sistema Internazionale.

In ambito relativistico useremo anche unità di misura naturali, ponendo ad esempio $c = 1$; per reintrodurla nelle equazioni si utilizzano considerazioni di tipo dimensionale.

Poste nella forma che abbiamo appena scritto, le equazioni di Maxwell sono inconsistenti col principio di relatività galileiano. Mostriamolo.

Supponiamo dunque di avere due sistemi di riferimento, che chiamiamo K e K' , cartesiani con assi paralleli. Consideriamo in K un punto di raggio vettore \vec{r} , al quale associamo un'istante t . Supponiamo che K' sia in moto rettilineo uniforme rispetto a K , e di modo tale che all'origine dei tempi i due sistemi di riferimento coincidano: sia $\vec{v}_0 t$ il raggio vettore dell'origine di K' in K (con \vec{v}_0 , ovviamente, la velocità con la quale K' si sta muovendo rispetto a K). In K' , lo stesso punto ha raggio vettore \vec{r}' e associato l'istante t' . In questo modo:

¹Tuttavia, le espressioni di \vec{E} e \vec{B} diventano “strane”, per la comparsa di fattori 4π dovuti alla razionalizzazione di questo sistema. Ad esempio, in questo sistema il modulo del campo elettrico generato da una carica e puntiforme a distanza r da essa vale

$$E = \frac{e}{4\pi r^2}$$

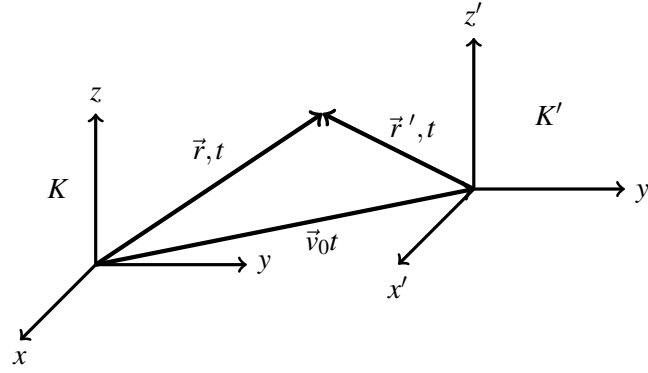


Figura 1.1: Trasformazione fra sistemi di riferimento inerziali

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ t' = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Vogliamo ora determinare delle trasformazioni fra K e K' che lascino invariate in forma le equazioni di Maxwell come le abbiamo scritte prima.

Supponiamo dunque che sia l'equazione della forza di Lorentz a restare invariata². Si ha:

$$\begin{aligned} K: \quad m\vec{a} &= q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \\ K': \quad m\vec{a}' &= q' \left(\vec{E}' + \frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{B}' \right) \end{aligned}$$

Come conseguenza delle trasformazioni di Galilei e della legge di composizione delle velocità, le accelerazioni sono le stesse nei due sistemi di riferimento, e quindi $\vec{a}' = \vec{a}$; sperimentalmente risulta anche che $q = q'$.

Dunque, in K' :

$$m\vec{a}' = q' \left(\vec{E}' + \frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{B}' \right) \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = q \left(\vec{E}' + \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{c} \times \vec{B}' \right)$$

Dobbiamo dunque trovare delle trasformazioni per \vec{E} e \vec{B} che rendano invarianti le equazioni di Lorentz per ogni \vec{v} . Si dovrà dunque avere:

$$\vec{B} = \vec{B}' \quad \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{B}$$

Adesso, sfruttando queste leggi di trasformazione, vogliamo verificare se le equazioni di Maxwell siano effettivamente invarianti. Innanzitutto si ha³:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}' = \vec{\nabla} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x^i} v_0^i + \frac{\partial}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Quindi, ad esempio, $\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Inoltre:

$$\vec{\nabla}' \times \vec{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{B} \right) + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{B} \right) + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}$$

²Nota: nella seconda riga non compare c' . La velocità della luce nel vuoto è infatti una costante universale; in fondo è come se al suo posto ci fosse semplicemente un numero.

³Questi risultati si ricavano applicando la derivazione composta alle leggi inverse di trasformazione delle coordinate, ossia:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t' \\ t = t' \end{cases}$$

Ora, poiché in generale $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}$, e considerando che \vec{v}_0 non dipende da nessuna delle tre coordinate cartesiane (dunque $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0/c = 0$), si avrà:

$$\vec{\nabla}' \times \vec{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} = \frac{\vec{v}_0}{c} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \left(\frac{\vec{v}_0}{c} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} + \frac{1}{c} (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = 0$$

Sembrerebbe dunque che tutto fili liscio. Però, considerando che $\rho' = \rho$ (la carica e i volumi si conservano):

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{B} \right) = \rho + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{B} \right)$$

Poiché, in generale, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$, allora si ha:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' = \rho + \vec{B} \cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{v}_0}{c} \right)}_{=0} - \frac{\vec{v}_0}{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \rho - \frac{\vec{v}_0}{c} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}_{\neq 0} \neq \rho$$

Dunque, le equazioni di Maxwell *non* sono invarianti. Lo stesso risultato si sarebbe potuto raggiungere imponendo che fossero altre equazioni ad essere invarianti, rispetto a quella usata da noi (l'equazione della forza di Lorentz).

1.2 I postulati della relatività ristretta e il formalismo covariante

Come abbiamo appena visto, le equazioni di Maxwell non sono compatibili col principio di relatività galileiana; per risolvere il problema bisogna “estendere” le trasformazioni di Galileo, o meglio l'intera meccanica formulando la relatività ristretta.

Quest'ultima si fonda su tre postulati:

1. Lo spazio è omogeneo e isotropo, il tempo omogeneo
2. Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali
3. La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Il primo postulato è condiviso con la meccanica classica. Il secondo solo in parte: stavolta sono TUTTE le leggi della fisica, elettromagnetismo compreso, a dover essere le stesse fra osservatori inerziali. L'ultimo postulato, invece, è esclusivo della relatività.

Definiamo dunque *spaziotempo* l'insieme di tutti gli eventi fisici; si tratta di uno spazio quadridimensionale, in quanto in un dato sistema di riferimento ad un evento sono associati quattro numeri: uno per la sua localizzazione temporale e gli altri tre per quella spaziale. Indichiamo questi quattro numeri con $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ (con la convenzione che gli indici greci rappresentino numeri variabili fra 0 e 3) ove $x^0 = ct$, o $x^0 = t$ se si usano unità naturali (nelle quali $c = 1$); si può anche scrivere $x^\mu = (t, x^i)$ (con la convenzione che gli indici latini rappresentino numeri variabili fra 1 e 3) o $x^\mu = (t, \vec{x})$.

Definiamo poi *intervallo* fra due eventi infinitamente vicini x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ come:

$$ds^2 := dt^2 - \sum_i (dx^i)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ove $\eta_{\mu\nu}$ è l'elemento (μ, ν) -esimo (cioè quello sulla μ -esima riga e sulla ν -esima colonna) della matrice 4×4 η , detta *metrica di Minkowski* (“metrica” perché è una generalizzazione a quattro dimensioni del concetto di “distanza” fra due punti):

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da notare che il fatto che siano gli ultimi tre indici (quelli spaziali) ad avere il segno negativo è una pura convenzione: in letteratura si può anche trovare $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Per $\eta^{\mu\nu}$ si intende l'elemento (μ, ν) -esimo della matrice inversa di η , e dunque:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$$

ove δ è la *delta di Kronecker*. Numericamente, però, l'inversa di η coincide con η stessa.

Dato un evento, ogni sistema di riferimento inerziale associa ad esso una diversa quadrupletta x^μ . Vogliamo dunque capire quali siano le trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali.

Non ripercorriamo tutto il ragionamento, perché lo abbiamo già visto in altri corsi. Si determina che, se K e K' sono due sistemi di riferimento inerziali, la legge di trasformazione delle coordinate di un evento da K a K' è del tipo:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu + a^\mu$$

con Λ^μ_{ν} elemento (μ, ν) -esimo⁴ della matrice 4×4 Λ e a^μ elemento μ -esimo di un quadrivettore costante qualunque (che fisicamente rappresenta una traslazione spaziotemporale). Si tratta dunque di una trasformazione lineare.

Inoltre, poiché ds^2 dev'essere invariante per il terzo postulato della relatività, la matrice Λ dovrà essere tale che:

$$\begin{aligned} dx'^\mu &= \Lambda^\mu_{\nu} dx^\nu & ds^2 &= ds'^2 & \Rightarrow & \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\rho} \Lambda^\nu_{\sigma} dx^\rho dx^\sigma & \Rightarrow \\ & \Rightarrow & \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\rho} \Lambda^\nu_{\sigma} dx^\rho dx^\sigma & \forall dx^\rho, dx^\sigma & \Rightarrow & \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\rho} \Lambda^\nu_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

È dunque quest'ultima la relazione che devono soddisfare le matrici Λ , il cui insieme è detto *gruppo di Lorentz*.

Le relazioni con gli indici sono, ovviamente, relazioni componente per componente fra matrici. In notazione matriciale, ad esempio, la condizione di appartenenza al gruppo di Lorentz è:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

Spesso si indica il gruppo di Lorentz col simbolo $O(1, 3)$ che indica il gruppo delle matrici ortogonali (in realtà le matrici del gruppo di Lorentz sono *pseudo-ortogonali*) con i segni sulla diagonale non tutti uguali (il primo 1 indica che il primo termine è positivo, e il 3 che gli altri sono negativi). Essendo ortogonali, le matrici del gruppo di Lorentz sono invertibili, e si ha:

$$\mathbb{1} = \eta^{-1} \eta = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \Lambda \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta = \eta \Lambda^T \eta$$

In termini di indici, si ha:

$$(\Lambda^{-1})^\mu_{\nu} = \eta^{\mu\rho} \underbrace{\Lambda^\sigma_{\rho}}_{(\Lambda^T)^\rho_{\sigma}} \eta_{\sigma\nu} = \tilde{\Lambda}_\nu{}^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu$$

L'insieme delle trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali è però più ampio del gruppo di Lorentz, perché può contenere le traslazioni spaziotemporali. Quest'insieme di trasformazioni più ampio (cioè il gruppo di Lorentz con comprese le traslazioni spaziotemporali) è detto *gruppo di Poincaré*.

Ora, per il secondo postulato della relatività ristretta, se riuscissimo a scrivere una legge fisica in termini di tensori, questa sarebbe *covariante a vista*, ossia invariante in forma fra sistemi di riferimento inerziali. Cosa significa?

Supponiamo che in un sistema di riferimento inerziale K una legge si esprima come $A = B$. In un altro sistema di riferimento inerziale K' alla grandezza rappresentata da A in K sarà associata una quantità A' , e parimenti alla grandezza rappresentata in K da B sarà associata la quantità B' . Se $A = B$ è una legge covariante a vista, ciò significa che in K' si ha $A' = B'$. Entrambi i membri dell'equazione, dunque, possono variare singolarmente, ma l'uguaglianza (o, più in generale, la *relazione* fra le grandezze) resta inalterata.

⁴Nota: l'indice di riga è *sempre* quello di sinistra, e l'indice di colonna è *sempre* quello di destra, indipendentemente dalla loro posizione alto/basso.

1.3 Tensori e campi tensoriali

1.3.1 I tensori

Cosa si intende per *tensore*?

Un *tensore* è una quantità che rispetto al gruppo di Poincaré si trasforma linearmente in maniera ben definita⁵. Vediamo di capirlo meglio per esempi.

Il più semplice tensore possibile è uno scalare: si tratta di una quantità rappresentata da un numero, chiamiamolo ϕ , che non trasforma fra sistemi di riferimento inerziali: $\phi = \phi'$. Esempi di scalari sono la massa o la carica di un corpo.

Il primo tipo di tensore non banale è il *quadrivettore (controvariante)*, ossia una quantità che in un sistema di riferimento inerziale è rappresentata da quattro numeri, e si trasformano rispetto al gruppo di Poincaré tramite la seguente legge:

$$d'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} d^{\nu}$$

Se per esempio in K si ha $V^{\mu} = W^{\mu}$, allora in K' si avrà $V'^{\mu} = W'^{\mu}$, ossia $\Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} W^{\nu}$; un esempio di quadrivettore è dx^{μ} .

Se si hanno due quadrivettori, V^{μ} e W^{μ} , è facile vedere che la quantità $\eta_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu}$ è uno scalare. Infatti:

$$\eta_{\mu\nu} V'^{\mu} W'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} V^{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} W^{\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} V^{\rho} W^{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} V^{\rho} W^{\sigma} = \eta_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} V'^{\mu} W'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu}$$

Dati due quadrivettori, dunque, la loro *contrazione* è uno scalare.

Definendo $V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu}$, allora la contrazione fra V^{μ} e W^{μ} si può scrivere $V_{\mu} W^{\mu}$; ovviamente $V_{\mu} W^{\mu} = V^{\mu} W_{\mu}$.

I quadrivettori del tipo V_{μ} sono detti *quadrivettori covarianti*; per capire come si trasformano sfruttiamo la legge di trasformazione dei quadrivettori controvarianti:

$$V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu} \Rightarrow V'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} V^{\rho} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} \eta^{\rho\sigma} V_{\sigma} = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\sigma} V_{\sigma} = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu} V_{\nu} \Rightarrow V'_{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu} V_{\nu}$$

Generalizzando: un tensore di rango (m, n) è un oggetto con m indici “alti” e n “bassi”, che indichiamo con $T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}$, che si trasforma per il gruppo di Poincaré secondo la legge:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\rho_m} \tilde{\Lambda}_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \tilde{\Lambda}_{\nu_n}^{\sigma_n} T^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}$$

Adesso, che operazioni si possono compiere fra i tensori?

Prodotto tensoriale: dati un tensore di rango (m, n) e uno di rango (k, ℓ) , il loro *prodotto tensoriale* è un tensore di rango $(m+k, n+\ell)$ che ha come componenti i prodotti algebrici delle componenti dei due tensori di partenza:

$$V^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}, W^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{\ell}} \Rightarrow T^{\mu_1 \dots \mu_{m+k}}_{\nu_1 \dots \nu_{n+\ell}} = V^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} W^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{\ell}}$$

Contrazione degli indici: dato un tensore di rango (m, n) , contraendo k dei suoi indici controvarianti con k di quelli covarianti si ottiene un tensore di rango $(m-k, n-k)$. Ad esempio partendo dal tensore $T^{\lambda\mu\nu}_{\rho\sigma}$, di rango $(3, 2)$ e contraendo gli indici μ e ρ si ottiene il tensore

$$W^{\lambda\nu}_{\sigma} = T^{\lambda\mu\nu}_{\mu\sigma}$$

che è di rango $(2, 1)$

Caratteristica importante dei tensori sono le loro proprietà di simmetria o antisimmetria.

Un tensore $S_{\mu\nu}$ si dice *simmetrico* se $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$, mentre un tensore $A_{\mu\nu}$ si dice *antisimmetrico* se $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$, e analogamente per i tensori controvarianti. Da notare che nel caso di un tensore misto, come può essere T^{μ}_{ν} , non ha alcun senso chiedersi se sia simmetrico o antisimmetrico; la condizione $T^{\mu}_{\nu} = T^{\nu}_{\mu}$ non è infatti invariante sotto trasformazioni di Lorentz:

$$T^{\mu}_{\nu} = T^{\nu}_{\mu} \Rightarrow T'^{\mu}_{\nu} \neq T'^{\nu}_{\mu}$$

⁵Matematicamente, un *tensore* forma una *rappresentazione* del gruppo di Poincaré, cioè una maniera di associare ad ogni elemento del gruppo una matrice.

Se un tensore è simmetrico o antisimmetrico, inoltre, tale è in qualunque sistema di riferimento inerziale (lo si verifica facilmente).

Le proprietà di simmetria si estendono facilmente a tensori di rango maggiore: un tensore si dice *completamente simmetrico* o *completamente antisimmetrico* se valgono le relative proprietà di simmetria o antisimmetria per lo scambio di una qualsiasi coppia di indici.

Dato un tensore $T_{\mu\nu}$, si definisce la sua *parte simmetrica* come

$$T_{(\mu\nu)} := \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$$

e la sua *parte antisimmetrica* come

$$T_{[\mu\nu]} := \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$$

Ovviamente, $T_{(\mu\nu)}$ e $T_{[\mu\nu]}$ sono rispettivamente simmetrici e antisimmetrici, anche se il tensore di partenza $T_{\mu\nu}$ non lo era.

Altro fatto importante è che la contrazione di un tensore simmetrico con uno antisimmetrico vale zero. Supponiamo infatti che $S_{\mu\nu}$ sia simmetrico e $A_{\mu\nu}$ antisimmetrico. Allora:

$$S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = -S_{\mu\nu}A^{\nu\mu} = -S_{\nu\mu}A^{\nu\mu}$$

cambiamo ora il nome degli indici (operazione lecita in quanto sommati, e dunque muti): $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$. Allora:

$$S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = -S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0$$

Per *tensore invariante* si intende un tensore che ha le stesse componenti in ogni sistema di riferimento. In altre parole, $T^{\mu\nu\dots}$ si dice *invariante* se $T'^{\mu\nu\dots} = T^{\mu\nu\dots}$. Vediamo alcuni esempi:

- $\eta^{\mu\nu}$ è un tensore invariante, infatti:

$$\eta'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$$

- $\delta^{\mu\nu}$ non è un tensore invariante, infatti:

$$\delta'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \delta^{\rho\sigma} \neq \delta^{\mu\nu}$$

Nota: se nei conti compare $\delta^{\mu\nu}$ o $\delta_{\mu\nu}$ abbiamo sbagliato da qualche parte, perché si tratta di oggetti non ben definiti.

- Il *tensore di Levi-Civita* $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, che è un tensore completamente antisimmetrico con $\epsilon^{0123} = +1$. Verifichiamo che è invariante:

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Quest'ultimo oggetto è completamente antisimmetrico rispetto allo scambio di una qualsiasi coppia di indici; infatti, scambiando μ con ν :

$$\epsilon'^{\nu\mu\rho\sigma} = \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \underbrace{\epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}}_{-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}} = -\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Ma di un tensore completamente antisimmetrico a quattro dimensioni, a meno di multipli, ce n'è solo uno (fissata una "casella" del tensore, tutte le altre sono automaticamente determinate). Dunque:

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

È un fatto (in sostanza ne è la definizione) che $x = \det \Lambda$. Lo si può "vedere" facilmente in due dimensioni:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 \end{pmatrix} \quad \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \epsilon^{\alpha\beta} = x \epsilon^{\mu\nu}$$

e se poniamo ad esempio $\mu = 1$ e $\nu = 2$ allora, tenendo conto che $\varepsilon^{12} = 1$ e che $\varepsilon^{\mu\mu} = 0$, si ha

$$\Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\beta \varepsilon^{\alpha\beta} = x \Rightarrow x = \Lambda^1_1 \Lambda^2_2 \varepsilon^{12} + \Lambda^1_2 \Lambda^2_1 \varepsilon^{21} = \Lambda^1_1 \Lambda^2_2 - \Lambda^1_2 \Lambda^2_1 = \det \Lambda$$

Dunque:

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \det \Lambda \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Ma come conseguenza del fatto che Λ deve soddisfare la condizione del gruppo di Poincaré si ha⁶ che $\det \Lambda = \pm 1$, e quindi:

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \pm \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

In realtà, quindi, ε è invariante rispetto a tutte le trasformazioni di Lorentz con $\det \Lambda = 1$, mentre cambia di segno per quelle con $\det \Lambda = -1$; è per questo che la dicitura corretta per ε è quella di *pseudotensore invariante*.

Ora, esistono altri tensori invarianti diversi da quelli visti? Ossia, esistono tensori invarianti che non siano combinazioni lineari di $\eta^{\mu\nu}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$?

La risposta, contenuta in un teorema che noi non dimostriamo, è negativa: se $T^{\mu\nu\rho\sigma}$ è un generico tensore invariante, questo non può che essere una combinazione lineare di ε o di prodotti di η , ossia:

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} = a \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + b \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + c \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + d \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}$$

1.3.2 Campi tensoriali

Per *campo tensoriale* si intende un tensore le cui componenti sono funzione del punto dello spaziotempo in cui vengono considerate.

Un *campo scalare*, dunque, sarà uno scalare del tipo $\varphi(x)$ e che trasforma come:

$$\varphi(x) = \varphi(x')$$

Un *campo vettoriale* è una collezione di quattro numeri $V^\mu(x)$, ognuno dei quali dipende appunto da x . I campi vettoriali trasformano come:

$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x) \quad V'_\mu(x') = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu V_\nu(x)$$

ma poiché $x' = \Lambda x \Rightarrow x = \Lambda^{-1} x'$, allora:

$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1} x') \quad V'_\mu(x') = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu V_\nu(\Lambda^{-1} x')$$

e rinominando x' con x :

$$V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1} x) \quad V'_\mu(x) = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu V_\nu(\Lambda^{-1} x)$$

Il gradiente di un campo tensoriale $T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots}(x)$ si trasforma anch'esso come un tensore, e lo si indica in questo modo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1\cdots}_{\nu_1\cdots} = \partial_\mu T^{\mu_1\cdots}_{\nu_1\cdots}$$

Questa notazione è consistente col fatto che il gradiente trasformi come un tensore covariante; infatti considerando che $x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x'^\mu$ si ha:

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu \partial_\nu$$

che è proprio la legge di trasformazione di un tensore covariante. Perciò:

$$\partial'_\mu T'^{\mu_1\cdots}_{\nu_1\cdots} = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu \Lambda^{\mu_1}_{\mu'_1} \Lambda^{\nu_1}_{\nu'_1} \cdots \partial_\nu T^{\mu'_1\cdots}_{\nu'_1\cdots}$$

6

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \eta \Rightarrow \det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda = \det \eta \Rightarrow \det \Lambda \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

e quindi il gradiente di un tensore di rango (m, n) è un tensore di rango $(m, n+1)$.

Tutto ciò noi lo abbiamo appena visto in quattro dimensioni, ma può essere generalizzato a qualunque dimensione. Se per esempio “passiamo” da quattro a tre dimensioni, tutto ciò continua a valere con la differenza che la metrica, invece di essere $\eta_{\mu\nu}$, è δ_{ij} , e le trasformazioni fra sistemi di riferimento sono le rotazioni tridimensionali (che, come noto, sono rappresentate da matrici R tali che $R^T R = \mathbb{1}$). In tre dimensioni, poi, non c'è più differenza fra vettori covarianti e controvarianti (per passare dall'uno all'altro si moltiplica per una δ), $A_i = A^i$; per non confonderci, però, useremo sempre indici controvarianti anche per tensori tridimensionali.

Anche in tre dimensioni possiamo definire il tensore ε^{ijk} completamente antisimmetrico con $\varepsilon^{123} = +1$. Questo tensore è utile per definire i prodotti vettoriali; infatti, in termini di ε^{ijk} , se \vec{a} e \vec{b} sono vettori si ha che:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^i = \varepsilon^{ijk} a^j b^k \quad (\vec{\nabla} \times \vec{a})^i = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} a^k$$

In questo modo, molte relazioni vettoriali sono più facili da ricavare, tenendo anche a mente alcune proprietà di ε^{ijk} . Queste sono (le si verificano “brutalmente”):

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ij\ell} = 2\delta^{k\ell} \quad \varepsilon^{ik\ell} \varepsilon^{imn} = \delta^{km} \delta^{\ell n} - \delta^{kn} \delta^{\ell m}$$

Analoghe relazioni valgono in quattro dimensioni:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} = -6\delta^\sigma_\alpha$$

(e analoghe per un numero diverso di indici controvarianti).

Infine, in tre dimensioni gli unici tensori invarianti sono ε e δ .

1.4 I gruppi di Poincaré e di Lorentz

Le trasformazioni di Poincaré sono caratterizzate dalla coppia (Λ, a) con $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$; queste costituiscono un gruppo, con la legge di trasformazione:

$$(\Lambda_2, a_2) \cdot (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

L'insieme $(\Lambda, 0)$ è il *sottogruppo di Lorentz*, ed è non-abeliano (cioè non commutativo); è anche detto “gruppo di Lie”, cioè è un gruppo che può essere parametrizzato in modo continuo (le Λ formano uno spazio continuo di matrici). Possiamo dunque chiederci se questo gruppo formi una varietà connessa (ossia tale che si possa passare con continuità da un elemento all'altro) oppure no. Così come lo abbiamo definito, il gruppo di Lorentz non è connesso; vediamo dunque meglio qual è la sua struttura.

Abbiamo già visto che per il gruppo di Lorentz vale $\det^2 \Lambda = 1$, e dunque ci sono elementi per i quali $\det \Lambda = 1$ e altri per i quali $\det \Lambda = -1$: variando in modo continuo i parametri di una Λ con $\det \Lambda = 1$, esso non potrà che variare in maniera continua, e pertanto con una trasformazione del genere sarà impossibile avere $\det \Lambda = -1$. Questi due sottoinsiemi del gruppo di Lorentz sono pertanto sconnessi fra loro.

Consideriamo ora la componente $(0, 0)$ dell'identità $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Si ha:

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 = 1 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1$$

Dunque si presentano due nuove possibilità: o $\Lambda^0_0 \geq 1$ oppure $\Lambda^0_0 \leq -1$, e anche stavolta con una trasformazione continua non sarà mai possibile passare da una Λ con $\Lambda^0_0 \geq 1$ a una con $\Lambda^0_0 \leq -1$.

Il gruppo di Lorentz è quindi sconnesso, e composto da quattro componenti. Di queste solo una può essere un sottogruppo, ed è quella che contiene l'identità⁷; questa è la componente con $\det \Lambda = 1$ e $\Lambda^0_0 \geq 1$, che di solito si indica con $SO(1, 3)_c$ e ha il nome di *(sotto)gruppo proprio di Lorentz*. Si verifica che $SO(1, 3)_c$ è effettivamente un sottogruppo, e che è connesso.

È questo il *vero* gruppo di simmetria della natura: l'elettromagnetismo sarebbe infatti invariante per tutte le trasformazioni del gruppo di Lorentz, ma altre interazioni fondamentali non lo sono, e l'unico insieme di trasformazioni per le quali *tutte* le interazioni ad oggi note sono invarianti è proprio $SO(1, 3)_c$.

Per “saltare” alle altre componenti del gruppo di Lorentz partendo da $SO(1, 3)_c$ servono due *trasformazioni discrete*:

⁷Per definizione, un gruppo deve contenere l'identità al suo interno.

la parità: $P : (x^0, x^i) \mapsto (x^0, -x^i)$

l'inversione temporale: $T : (x^0, x^i) \mapsto (-x^0, x^i)$

1.4.1 Le trasformazioni infinitesime

Poiché $SO(1,3)_c$ è connesso, ha senso parlare di *trasformazioni di Lorentz infinitesime*, ossia di trasformazioni “molto vicine” all’identità. Lo studio di esse è molto utile per capire la struttura del gruppo e per ricavare l’espressione delle trasformazioni finite.

Una trasformazione infinitesima sarà del tipo:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Omega^\mu{}_\nu$$

con $|\Omega^\mu{}_\nu| \ll 1$; in notazione matriciale, $\Lambda = \mathbb{1} + \Omega$.

Vediamo dunque quali sono le proprietà che deve soddisfare Ω affinché questa sia una trasformazione di Lorentz. Poiché $|\Omega^\mu{}_\nu| \ll 1$, nei conti trascureremo tutti i termini non lineari in Ω . Dunque, partendo dalla condizione di appartenenza al gruppo di Lorentz:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow (\mathbb{1} + \Omega^T) \eta (\mathbb{1} + \Omega) = \eta \Rightarrow \eta + \Omega^T \eta + \eta \Omega + \underbrace{\Omega^T \eta \Omega}_{O(\Omega^2)} = \eta \Rightarrow \Omega^T \eta = -\eta \Omega$$

Se dunque definiamo $\omega = \eta \Omega$, questa condizione è equivalente all’antisimmetria di ω : $\omega^T = -\omega \Rightarrow (\eta \Omega)^T = -\eta \Omega \Rightarrow \Omega^T \eta = -\eta \Omega$.

Dunque, affinché una matrice Ω rappresenti una trasformazione infinitesima è necessario che

$$\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \Omega^\rho{}_\nu$$

sia antisimmetrica.

Sfruttando questo fatto possiamo dedurre la dimensione dello spazio delle matrici di Lorentz. Essa infatti è uguale alla dimensione dello spazio delle matrici antisimmetriche 4×4 , che è 6. Di questi 6 parametri liberi, 3 corrispondono alle rotazioni tridimensionali e gli altri 3 ai boost lungo i tre assi. Il legame fra queste e ω è:

rotazioni: in questo caso ω ha entrambi gli indici spaziali, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ e $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \phi_k$, ove ϕ_k ha il significato di angolo di rotazione attorno all’asse k

boost: in questo caso gli indici di ω sono uno temporale e uno spaziale, $\omega_{i0} = -\omega_{0i} = \beta_i$, ove β_i è la velocità del boost lungo l’asse i

Ora, come possiamo ricavare le trasformazioni finite da quelle infinitesime?

Definendo:

$$\Lambda = e^\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Omega^n}{n!} (= \mathbb{1} + \Omega + O(\Omega^2))$$

allora vale la seguente

Proposizione: La matrice Λ così costruita è una matrice del gruppo di Lorentz, cioè vale:

$$(e^\Omega)^T \eta e^\Omega = \eta$$

Dimostrazione: Volendo, la si può fare “brutalmente”; noi la facciamo in modo un po’ più originale.

Definiamo $\Lambda(t) = e^{t\Omega}$, e $f(t) = \Lambda^T \eta \Lambda - \eta$. Vogliamo dunque dimostrare che $f(t) = 0 \forall t$.

Innanzitutto si ha:

$$f(0) = \underbrace{\Lambda^T(0)}_{=\mathbb{1}} \eta \underbrace{\Lambda(0)}_{=\mathbb{1}} - \eta = \eta - \eta = 0$$

Inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \frac{\partial}{\partial t} (e^{t\Omega})^T \cdot \eta e^{t\Omega} + (e^{t\Omega})^T \eta \frac{\partial}{\partial t} e^{t\Omega}$$

e poiché⁸:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{t\Omega} = e^{t\Omega} \Omega = \Omega e^{t\Omega}$$

allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t) &= (e^{t\Omega})^T \Omega^T \eta e^{t\Omega} + (e^{t\Omega})^T \eta \Omega e^{t\Omega} = \\ &= (e^{t\Omega})^T (\Omega^T \eta + \eta \Omega) e^{t\Omega} = 0 \end{aligned}$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che $\Omega^T \eta = -\eta \Omega$. \square

Si può verificare che, applicando questa procedura a casi particolari, ci si riconduce alle rotazioni e/o ai boost. Ad esempio, se ω è tale che $\omega_{12} = -\omega_{21} = \varphi_3$ e $\omega_{\mu\nu} = 0$ se $\mu, \nu \neq 1, 2$, allora calcolando Ω e e^Ω si trova una rotazione di angolo φ_3 attorno all'asse 3; partendo da $\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta_1$, invece, si ricava un boost di velocità β_1 lungo l'asse 1.

1.5 Cinematica relativistica

1.5.1 Le grandezze del moto

La "traiettoria" di una particella si descrive in modo relativisticamente covariante fornendo una curva $x^\mu(\lambda)$ nello spaziotempo, ove λ è un parametro. Questa curva descrive effettivamente la traiettoria di una particella se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\frac{dx^0}{d\lambda} > 0 \quad \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \geq 0$$

La prima condizione implica che $x^0(\lambda)$ (il tempo) sia funzione monotona crescente del parametro λ , e perciò può essere invertita per determinare λ in funzione del tempo. In questo modo la legge oraria $\vec{x}(t)$ può essere ricavata eliminando λ in favore del tempo in x^μ .

Se riscriviamo in questo modo la seconda condizione:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda} = \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx_\mu}{dt} = \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 (1 - v^2) \geq 0 \Rightarrow v^2 \leq 1$$

ci rendiamo conto di come essa sia necessaria affinché la particella non assuma velocità maggiori di c .

Dato che in generale il *cono luce* di un quadrivettore A^μ è l'ipersuperficie individuata da $A_\mu A^\mu = 0$, la seconda condizione seleziona per ogni λ l'interno del cono luce della particella, mentre la prima condizione ne seleziona la metà che si trova nel futuro. Dunque, queste due condizioni assicurano che per ogni valore del parametro λ la linea d'universo della particella sia sempre causale (cioè interna al cono luce, e tale che anche il suo vettore tangente lo sia) e diretta verso il futuro.

Vale inoltre l'*invarianza per riparametrizzazione*, ossia è sempre possibile effettuare il cambio di parametro $\lambda \rightarrow \lambda'$ invertibile di modo tale che $x^\mu(\lambda) \rightarrow x^\mu(\lambda'(\lambda)) = \tilde{x}^\mu(\lambda)$, e \tilde{x} rappresenta sempre la stessa traiettoria. Per via di questa "ridondanza", fra queste quattro le funzioni fisicamente rilevanti sono tre (si ha la stessa informazione che nel caso non relativistico): infatti una delle $x^\mu(\lambda)$ rappresenta il tempo della particella, e chiamandola ovviamente $x^0(\lambda)$ si può porre:

$$x^0(\lambda) = t \rightarrow \lambda = \lambda(t) \quad x^i(t) \rightarrow x^i(\lambda(t))$$

L'informazione fisica rilevante è dunque contenuta in tre delle quattro funzioni. Questa ridondanza può essere sfruttata per fare scelte particolarmente utili. Le due più importanti sono:

$\lambda = t$: Questo tipo di descrizione rompe esplicitamente l'invarianza di Lorentz. Con questa scelta si ha:

$$x^\mu(t) = (t; x^i(t)) \quad \frac{dx^\mu}{dt} = (1; v^i(t))$$

Notare che quest'ultimo *non* è un quadrivettore.

⁸La prima uguaglianza la si verifica direttamente con la definizione di esponenziale di una matrice, mentre la seconda vale perché Ω commuta con il proprio esponenziale, e anche questo lo si può verificare con la definizione stessa.

$\lambda = s$: In questo caso s è il cosiddetto *tempo proprio* della particella, ossia il tempo misurato in un sistema di riferimento inerziale istantaneamente solidale con la particella. In questo caso si ha:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - v^2} = \gamma^{-1}$$

Dal punto di vista geometrico, il ds è la distanza invariante fra due punti infinitamente vicini sulla traiettoria spaziotemporale del corpo. Dunque:

$$ds = \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \eta_{\mu\nu}} d\lambda$$

e, come noto s è uno scalare di Lorentz, e questo è il motivo per il quale lo si usa molto spesso. Pertanto, dx^μ/ds è un quadrivettore, detto *quadrivelocità*:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

Si ha che:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(1; \vec{v}) \quad u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{ds}{ds} \frac{ds}{ds} = 1$$

In base a ciò si possono definire altre grandezze:

- Il *quadrimento*:

$$p^\mu = m u^\mu$$

Si ha che la sua componente temporale è l'energia della particella, mentre quella spaziale è il suo impulso

- La *quadriaccelerazione*:

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt}(1; \vec{v})$$

Si vede facilmente che $w^\mu u_\mu = 0$. Infine, $w^\mu|_{\vec{v}=0} = (0, \vec{a})$, ossia la quadriaccelerazione nel sistema di riferimento istantaneamente solidale con la particella ha come componenti spaziali l'accelerazione stessa della particella in un sistema di riferimento inerziale.

1.5.2 L'equazione del moto

Alla luce di quanto visto, l'equazione del moto della particella diventa:

$$f^\mu = m w^\mu = m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$$

ove f^μ è la *quadriforza*.

Vogliamo considerare il caso in cui quest'ultima è generata da campi elettromagnetici. In formalismo non covariante le equazioni dell'elettrodinamica sono scritte in termini di \vec{E} e \vec{B} ; per riscriverle in termini covarianti dobbiamo “creare” un tensore a partire da essi.

In questo caso, però, non possiamo “estendere” \vec{E} e \vec{B} a quadrivettori, perché non abbiamo niente da usare come loro eventuale componente temporale. “Incorporiamo”, dunque, questi due campi in un tensore antisimmetrico $F_{\mu\nu}$; è necessario che $F_{\mu\nu}$ sia antisimmetrico perché in questo modo non abbiamo problemi di gradi di libertà: \vec{E} e \vec{B} in totale hanno sei gradi di libertà⁹, tanti quanti quelli di un tensore antisimmetrico¹⁰.

Definiamo dunque questo tensore di modo che:

$$F^{i0} = E^i \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad \left(\rightarrow B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk} \right)$$

⁹Tre per le componenti del campo elettrico e tre per quello magnetico.

¹⁰La condizione $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ fissa infatti i valori della “diagonale del tensore” (si dovrà avere $F^{\mu\mu} = 0$), e fuori da essa rimangono 12 componenti vincolate fra loro: fissati i valori di sei di queste, tutto il tensore è automaticamente determinato.

In termini di questo tensore, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

le prime sono dette *identità di Bianchi*¹¹, e sono le equazioni di Maxwell prive di sorgenti (divergenza di \vec{B} e rotore di \vec{E}), mentre le seconde sono propriamente dette *equazioni di Maxwell* (in seguito quando diremo “equazioni di Maxwell” ci riferiremo a queste), e sono quelle in presenza di sorgenti (divergenza di \vec{E} e rotore di \vec{B}).

Inoltre, nelle equazioni di Maxwell j^ν è la *quadrivettore*:

$$j^\nu = (\rho, \vec{j})$$

Dunque, tornando all’equazione del moto, si ha:

$$f^\mu = m \frac{du^\mu}{ds} = e F^{\mu\nu}(x(s)) u_\nu$$

detta *equazione di Lorentz*.

Queste tre equazioni che abbiamo visto sono “accoppiate” fra loro: mentalmente possiamo pensare che le prime due (Bianchi e Maxwell) servano per ricavare i campi date le sorgenti, mentre l’ultima (Lorentz) permetta di ricavare il moto noti i campi. In realtà il mondo è un po’ più complicato: le particelle generano sì i campi, ma questi influenzano il moto stesso delle cariche che li generano; cercare di risolvere esattamente il problema è estremamente complicato, e lo vedremo alla fine del corso. Ai fini pratici, possiamo tranquillamente trascurare l’azione di un campo sulla particella stessa che lo genera.

1.5.3 Problema di Cauchy per le equazioni del moto

Equazioni di Lorentz

Vediamo ora alcuni metodi per risolvere le equazioni che abbiamo appena visto; iniziamo dalle equazioni di Lorentz.

Vogliamo cercare di capire se in linea di principio le equazioni di Lorentz sono risolubili, e con quali condizioni iniziali.

$$m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = e F^{\mu\nu}(x(s)) \frac{dx_\nu}{ds}$$

Sono quattro equazioni differenziali del second’ordine per $x^\mu(s)$, e pertanto ammettono univocamente una soluzione con due condizioni al contorno, ossia ci aspettiamo che la soluzione esista e sia unica se sono noti $x^\mu(0)$ e $\frac{dx^\mu}{ds}(0)$. Fisicamente, però, conosciamo solo posizione e velocità iniziali della particella, ossia $\vec{x}(0)$ e $\frac{d\vec{x}}{dt}(0) = \vec{v}(0)$; abbiamo dunque 6 (3+3) condizioni iniziali, mentre dalle equazioni di Lorentz ce ne aspetteremmo 8 (4+4). In realtà, il problema è risolubile, e lo si può vedere in due modi:

covariante: dobbiamo “costruire” le 4+4 condizioni iniziali a partire dalle 3+3. Innanzitutto, s deve soddisfare:

$$\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \eta_{\mu\nu} = 1 \quad \forall s$$

Ci basta però imporre questa condizione per $s = 0$. Vediamo perché.

Se infatti vale l’equazione di Lorentz:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} \right) = 2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{2}{m} e F^{[\mu\nu]}(x(s)) \frac{dx_{(\nu}}{ds} \frac{dx_{\mu)}}{ds} = 0$$

¹¹Nota: l’identità di Bianchi si può scrivere come la permutazione ciclica

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Infatti, poiché $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è completamente antisimmetrico:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{[\nu} F_{\rho\sigma]} = 0$$

e poiché ε non è un tensore identicamente nullo, si deve avere $\partial_{[\nu} F_{\rho\sigma]} = 0$. Svolgendo il calcolo esplicitamente (e rinominando gli indici) si ritrova la permutazione scritta sopra.

Quindi, supponendo valide le equazioni di Lorentz, la quantità $\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \eta_{\mu\nu}$ è costante, e se vale 1 per $s = 0$ varrà 1 per ogni s . La quadrivelocità, dunque, dovrà essere tale per cui inizialmente $u^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = 1$, e dunque non è un quadrivettore arbitrario.

Supponiamo dunque di conoscere $\vec{x}(0)$ e $\vec{v}(0)$, allora posto ad esempio $x^\mu(0) = (x^0(0) = 0; \vec{x}(0))$, si ha:

$$\frac{dx^\mu}{ds}(0) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1; \vec{v}(0))$$

In questo modo è soddisfatto il vincolo $u^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = 1$ per $s = 0$, e dunque per ogni s .

non covariante: passiamo dalle incognite $x^\mu(s)$ a $\vec{x}(t)$, esprimendo tutto in termini di t invece che di s :

$$0 = H^\mu := m \frac{du^\mu}{ds} - e F^{\mu\nu}(x) u_\nu = \gamma \left[m \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx^\mu}{dt} \right) - e F^{\mu\nu}(x) \frac{dx_\nu}{dt} \right]$$

Queste sono quattro equazioni differenziali del second'ordine rispetto alle tre incognite $\vec{x}(t)$. Quindi, al posto di $\frac{dx^\mu}{dt}$ si trova $(1; \frac{d\vec{x}(t)}{dt})$, e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{d\vec{x}}{dt})^2}}$. Vediamo ora che una di queste equazioni è ridondante:

$$u_\mu H^\mu = \underbrace{m u_\mu \frac{du^\mu}{ds}}_{=0} - \underbrace{e F^{[\mu\nu]} u_{(\mu} u_{\nu)}}_{=0} = 0$$

Esiste dunque una combinazione lineare delle H^μ che è nulla, e pertanto basta risolverne tre per risolverle tutte (l'ultima è determinata da questa combinazione lineare). Infatti, ad esempio:

$$u^0 H_0 - \vec{u} \cdot \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad H^0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{H}}{u^0} \quad (1.1)$$

Basta quindi risolvere le componenti spaziali di $\vec{H} = 0$:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} \right) = e \left[\vec{E}(\vec{x}(t), t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{x}(t), t) \right] \quad (1.2)$$

che sono equazioni differenziali rispetto alle incognite $\vec{x}(t)$ per le quali conosciamo le condizioni iniziali; pertanto, sono risolvibili.

Inoltre:

$$H^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{\sqrt{1-v^2(t)}} \right] = e \vec{E}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{v}(t)$$

(che è l'equazione della potenza). Poiché per (1.1) $\vec{H} = 0$ implica $H^0 = 0$, l'equazione della potenza è implicata dalla (1.2).

Identità di Bianchi e invarianza di gauge

Vediamo ora invece come si risolvono in generale le identità di Bianchi:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$$

Il *lemma di Poincaré* ci permette di risolvere in generalità queste equazioni: questo lemma asserisce che l'equazione è vera se e solo se il tensore antisimmetrico $F_{\mu\nu}$ si può scrivere come:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

ove A_μ è un quadrivettore. Ciò è inoltre vero localmente, ossia in un intorno sufficientemente piccolo del punto considerato; globalmente, invece, ciò può non essere vero. Nel nostro caso (cioè in spazi del tipo di \mathbb{R}^n), tuttavia, ciò è sempre verificato; A_μ è detto *quadripotenziale*.

Non verifichiamo qui il lemma, ma ci limitiamo a dimostrarne una implicazione, ossia che se $F_{\mu\nu}$ può essere scritto come $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, allora valgono le identità di Bianchi. Vediamolo:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = 2\varepsilon^{\mu[\nu\rho]\sigma} \partial_{(\nu} \partial_{\sigma)} A_\sigma = 0$$

ove alla seconda uguaglianza abbiamo eseguito la moltiplicazione e nel secondo termine rinominato ρ con σ e σ con ρ .

Il quadrivettore A_μ , però, è particolare: non è univocamente definito. Ciò significa che dato un $F_{\mu\nu}$ esistono più A_μ tali che $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Questa “ridondanza” per A_μ è detta *invarianza di gauge*; per comprenderla meglio, consideriamo la trasformazione:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

con $\Lambda(x)$ campo scalare generico. Allora si ha:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = F_{\mu\nu}$$

e quindi la trasformazione $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ lascia invariato $F_{\mu\nu}$, ossia i campi elettrico e magnetico.

Da notare che mentre $F_{\mu\nu}$ ha un significato fisico effettivo (ossia lo si può misurare), A_μ no (perché i potenziali sono definiti a meno di invarianza di gauge). Si possono, volendo, imporre condizioni (dette di *gauge fixing*) che rendano A_μ ben definito. Un esempio di gauge fixing è la *gauge di Lorenz*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

In questo caso, infatti, applicando la trasformazione di prima si ha che:

$$\partial_\mu A'^\mu = \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} + \partial_\mu \partial^\mu \Lambda = \partial_\mu \partial^\mu \Lambda \neq 0$$

Quindi in questo caso, a meno che Λ sia tale che $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0$ (in questo caso si parla di *gauge residua*), A_μ è univocamente definito.

Equazioni di Maxwell e quadricorrente

Ora, invece, come si risolvono le equazioni dinamiche?

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Innanzitutto, affinché quest’equazione sia soddisfatta, j^ν non può essere un quadrivettore arbitrario. Infatti:

$$\partial_{(\nu} \partial_{\mu)} F^{[\mu\nu]} = \partial_\nu j^\nu \Rightarrow \partial_\nu j^\nu = 0$$

Quest’equazione esprime la *conservazione della carica*. Espressa in notazione tridimensionale diventa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

che è proprio l’*equazione di continuità* della carica.

Ci chiediamo ora: che espressione esplicita ha j^ν ?

Il caso più semplice possibile è quello di una particella carica in moto. Se e è la sua carica, $\vec{x}(t)$ la sua traiettoria e $\vec{v}(t)$ la sua velocità, allora in notazione tridimensionale si ha:

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = e \vec{v}(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

ove $\delta^{(3)}$ è la *delta di Dirac tridimensionale*. In generale, quindi, la quadricorrente è un quadrivettore le cui componenti sono distribuzioni matematiche.

Cenni sulle distribuzioni

$$\begin{aligned}
\int \delta(x-a)\varphi(x)dx &= \varphi(a) \quad \varphi \in C^\infty \\
\int \frac{d}{dx}\delta(x-a)\varphi(x)dx &= -\int \delta(x-a)\frac{d}{dx}\varphi(x)dx = -\varphi'(a) \\
\int \frac{d^n}{dx^n}\delta(x-a)\varphi(x)dx &= (-1)^n\varphi^{(n)}(a) \\
\delta(f(x)) &= \sum_{\text{zeri di } f} \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|} \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)
\end{aligned}$$

Il prodotto di due distribuzioni non è una distribuzione: $\delta(x)\delta(x) = \delta(0)\delta(x)$, infatti, non ha senso. La δ inoltre si può generalizzare a più dimensioni:

$$\delta^{(4)}(x-a) = \delta(x^0-a^0) \cdots \delta(x^3-a^3)$$

Trasformata di Fourier di una distribuzione $F(x)$:

$$\begin{aligned}
\hat{F}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ikx} F(x) d^4x \\
F(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ikx} \hat{F}(k) d^4k
\end{aligned}$$

Una trasformata notevole è quella della δ :

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

1.5.4 Le distribuzioni in elettromagnetismo e le leggi di conservazione

Dunque, le grandezze con cui si ha a che fare in elettromagnetismo sono comunque da considerarsi distribuzioni. Ad esempio, per una carica puntiforme ferma si ha:

$$\begin{aligned}
\rho(t, \vec{x}) &= e\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = 0 \\
\vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{x}}{r^3}
\end{aligned}$$

con $r = |\vec{x}|$.

Vediamo cosa succede se proviamo a verificare la validità delle equazioni di Maxwell fuori dall'ambito distribuzionale. Innanzitutto notiamo che:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} E^j = \frac{e}{4\pi r^3} \left(\delta^{ij} - 3 \frac{x^i x^j}{r^2} \right)$$

Pertanto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \varepsilon^{ijk} \partial_j E^k = 0$$

perché ε^{ijk} è contratto coi tensori simmetrici δ^{jk} e $x^j x^k$. Inoltre:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = \frac{e}{4\pi r^3} (3-3) = 0$$

Trattando quindi i campi come funzioni e non come distribuzioni si giunge ad assurdi; le relazioni che abbiamo usato sono infatti ben definite solo per $r \neq 0$.

Vediamo quindi cosa cambia in ambito distribuzionale¹²:

$$\int \partial_i E^j \varphi(\vec{x}) d^3\vec{x} = - \int E^j \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(\vec{x}) d^3\vec{x} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\vec{x}| > \varepsilon} E^j \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(\vec{x}) d^3\vec{x} =$$

¹²Il conto è impostato di modo tale che, dopo, ponendo giuste condizioni, si possa ricavare sia $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ che $\vec{\nabla} \times \vec{E}$.

Ove l'ultimo passaggio è lecito in quanto l'integrale è convergente ($E^j \sim 1/r^2$); da notare anche che il primo integrale, pensato come integrale di funzioni, non è ben definito in quanto $\partial_j E^j \sim 1/r^3$ per $r \rightarrow 0$. Dunque:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} E^j \right) \varphi(\vec{x}) d^3 \vec{x} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^i} (E^j \varphi(\vec{x})) d^3 \vec{x} \quad (1.3)$$

Il secondo termine lo si calcola applicando il teorema di Gauss e trasformandolo in un integrale di superficie. Il contributo sul bordo all'infinito è nullo perché sia il campo elettrico sia φ si annullano all'infinito. Del secondo integrale resta dunque il contributo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| = \varepsilon} E^j \varphi(\vec{x}) d\Sigma^i$$

ove $d\Sigma^i = n^i d\Sigma = n^i d\Omega \varepsilon^2$, e $n^i = x^i/r$ versore radiale (da notare che il contributo cambia segno perché n^i è diretto verso l'esterno della palla di raggio ε , mentre il versore uscente dal dominio $|x| > \varepsilon$ punta verso il suo interno). Dunque, questo contributo è uguale a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varepsilon^2 \frac{e}{4\pi} \frac{n^j}{\varepsilon^2} n^i \varphi(\vec{x}) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{e}{4\pi} n^i n^j \varphi(\vec{x}) d\Omega$$

A questo punto, per determinare $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ si deve moltiplicare l'equazione (1.3) per ε^{ijk} , e il risultato è 0 perché il tensore antisimmetrico ε^{ijk} viene contratto con dei tensori simmetrici (δ^{jk} , $x^j x^k$ e $n^i n^j$); per determinare $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ invece si pone $i = j$, e quindi il primo integrale nella (1.3) è nullo, come avevamo già calcolato (stavolta il calcolo è lecito in quanto l'origine non appartiene al dominio d'integrazione). Resta dunque:

$$\begin{aligned} \int \partial_i E^i \varphi(\vec{x}) d^3 \vec{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| = \varepsilon} \frac{e}{4\pi} n^i n^i \varphi(\vec{x}) d\Omega = \frac{e}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(\vec{x}) d\Omega = \frac{e}{4\pi} \varphi(0) \int_{|x| = \varepsilon} d\Omega = \frac{e}{4\pi} \varphi(0) 4\pi = \\ &= e \varphi(0) = \int e \delta^{(3)}(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d^3 \vec{x} \end{aligned}$$

Dunque, abbiamo mostrato che:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{x}}{r^3} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = -\nabla^2 \frac{1}{r} = 4\pi \delta(x)$$

1.5.5 La quadricorrente

Consideriamo ora una sorgente di campo elettromagnetico a simmetria sferica. Ciò significa che:

$$j^0(t, \vec{x}) = j^0(t, |\vec{x}|) \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r} j(t, |\vec{x}|)$$

Assumiamo anche che le sorgenti di campo siano tutte confinate in una sfera di raggio r_0 , ossia:

$$j^0(t, |\vec{x}|) = 0 \quad \vec{j}(t, |\vec{x}|) = 0 \quad \text{se } |\vec{x}| > r_0$$

Il *teorema di Birkhoff* sostiene (non lo dimostriamo) che allora il campo generato da questa distribuzione di carica al di fuori di r_0 è uguale al campo coulombiano:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{x}}{r^3} \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \quad r > r_0$$

con:

$$e = \int j^0(t, \vec{x}) d^3 \vec{x}$$

La quadricorrente di una particella carica che si muove lungo la traiettoria $\vec{x}(t)$ è:

$$j^\mu(t, \vec{x}) = e \left(\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)); \vec{v}(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)) \right)$$

Vogliamo dunque verificare che:

1. j^μ è un quadrivettore
2. j^μ è conservato, ossia soddisfa $\partial_\mu j^\mu = 0$

Dunque:

1. Per mostrarlo dobbiamo riscrivere j^μ in una forma che sia covariante a vista:

$$j^\mu(t, \vec{x}) = e \int \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) d\lambda$$

ovviamente questa formula è invariante per riparametrizzazioni. Verifichiamo che è equivalente alla forma che abbiamo scritto prima:

$$j^\mu(t, \vec{x}) = e \int \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta(x^0 - x^0(\lambda)) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(\lambda)) d\lambda = e \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{1}{\frac{dx^0}{d\lambda}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \underbrace{\vec{x}(\lambda(t))}_{:=\vec{x}(t)}) = e \frac{dx^\mu}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)) = e \delta^{(3)}(1; \vec{v}(t))$$

che è proprio la forma con la quale avevamo espresso j^μ prima. Vediamo ora che trasforma come un quadrivettore; scegliendo come λ un parametro invariante, si ha:

$$\begin{aligned} j'^\mu(x') &= e \int \frac{dx'^\mu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x' - x'(\lambda)) d\lambda = e \int \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta^{(4)}(\Lambda(x - x(\lambda))) d\lambda = \Lambda^\mu{}_\nu e \int \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\delta^{(4)}(x - x(\lambda))}{|\det \Lambda|} d\lambda = \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu e \int \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) d\lambda = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x) \end{aligned}$$

2. Poiché siamo in ambito distribuzionale, dobbiamo mostrare che:

$$\int \varphi(x) \partial_\mu j^\mu(x) d^4x = 0$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) \partial_\mu j^\mu d^4x &= - \int j^\mu \partial_\mu \varphi(x) d^4x = \\ &= -e \int \int \partial_\mu \varphi(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) d\lambda d^4x = -e \int \partial_\mu \varphi(x(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda = -e \int \frac{d}{d\lambda} \varphi(x(\lambda)) d\lambda = 0 \end{aligned}$$

perché l'integrale di una derivata totale nel senso delle distribuzioni è nullo (sarebbe la φ valutata sul bordo del dominio, che è all'infinito, ove la φ si annulla).

1.5.6 Le leggi di conservazione

La carica

In generale supporremo di avere una qualche distribuzione di cariche e che valgano le due proprietà appena dimostrate di j^μ ; supporremo inoltre che la quadricorrente si annulli all'infinito in modo che abbia senso parlare di carica totale, ossia:

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} j^\mu(t, \vec{x}) |\vec{x}|^3 = 0$$

(in questo modo, tutti gli integrali su \mathbb{R}^3 che coinvolgono la quadricorrente sono ben definiti).

Queste considerazioni hanno le seguenti conseguenze:

1. **Esiste una carica conservata.** Infatti:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

e definendo:

$$Q_V := \int_V \rho(t, \vec{x}) d^3\vec{x}$$

allora:

$$\frac{dQ_V}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 \vec{x} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3 \vec{x} = - \int_{\Sigma(V)} d\vec{\Sigma} \cdot \vec{j}$$

ove $\Sigma(V)$ è la superficie che contorna V .

Ora, se $V = \mathbb{R}^3$:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3 \vec{x} \quad \frac{dQ}{dt} = - \int_{\Sigma(\mathbb{R}^3)} d\vec{\Sigma} \cdot \vec{j} = 0$$

perché \vec{j} si annulla all'infinito.

2. Q è uno scalare di Lorentz. Vediamolo:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} j^0(t, \vec{x}) d^3 \vec{x} = \int_{\mathbb{R}^3} j^0(0, \vec{x}) d^3 \vec{x}$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che Q non dipende da t , e quindi l'integrale può essere valutato in qualunque istante. Cerchiamo ora di scrivere questa quantità in termini di entità covarianti a vista. Si ha:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^4} \delta(x^0) j^0(x^0, \vec{x}) d^4 x$$

A questo punto, definendo:

$$H(x^0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^0 > 0 \\ 0 & \text{se } x^0 \leq 0 \end{cases}$$

la funzione theta di Heaviside (la cui derivata è la delta di Dirac) allora:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^4} \partial_0 H(x^0) j^0(x^0, \vec{x}) d^4 x$$

Infine, poiché si ha $\partial_i H(x^0) = 0$:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\mu H(x^0) j^\mu(x) d^4 x$$

Dunque:

$$\begin{aligned} Q' &= \int_{\mathbb{R}^4} j'^\mu(x') \partial'_\mu H(x'^0) d^4 x' = \int_{\mathbb{R}^4} \Lambda^\mu_\nu j^\nu(x) \tilde{\Lambda}_\mu^\rho \partial_\rho H(x'^0) |\det \Lambda| d^4 x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \delta_\nu^\rho j^\nu(x) \partial_\rho H(x'^0) d^4 x = \int_{\mathbb{R}^4} j^\nu(x) \partial_\nu H(x'^0) d^4 x \end{aligned}$$

A questo punto, vogliamo mostrare che la grandezza

$$Q' - Q = \int_{\mathbb{R}^4} j^\mu(x) \left[\partial_\mu H(x'^0) - \partial_\mu H(x^0) \right] d^4 x$$

è nulla. Il problema è che la H non è uno scalare di Lorentz; riscriviamola quindi in una forma più maneggevole. Sfruttando il fatto che $\partial_\mu j^\mu = 0$:

$$\begin{aligned} Q' - Q &= \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\mu \left[j^\mu(x) \left(H(x'^0) - H(x^0) \right) \right] d^4 x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \left[\partial_0 \left(j^0(x) \left(H(x'^0) - H(x^0) \right) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j}(x) \left(H(x'^0) - H(x^0) \right) \right) \right] dx^0 d^3 \vec{x} \end{aligned}$$

Sfruttando ora il teorema di Gauss:

$$Q' - Q = \int_{\mathbb{R}^3} \left[j^0(x) \left(H(x'^0) - H(x^0) \right) \right]_{x^0=-\infty}^{x^0=+\infty} d^3 \vec{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma_\infty} \vec{j}(x) \left(H(x'^0) - H(x^0) \right) \cdot d\vec{\Sigma} dx^0$$

L'integrando del secondo contributo è nullo perché \vec{j} si annulla all'infinito. Per quello che invece riguarda il primo contributo, per $x^0 \rightarrow +\infty$ si ha $x'^0 = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_i x^i \rightarrow +\infty$, e dunque in questo limite $H(x'^0) = H(x^0) = 1$. Analogamente, per $x^0 \rightarrow -\infty$ si ha $x'^0 \rightarrow -\infty$, e quindi $H(x'^0) = H(x^0) = 0$. Pertanto:

$$Q' - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = Q'$$

Abbiamo dunque dimostrato che la carica si conserva per trasformazioni di Lorentz proprie; si può verificare che ciò continua a valere anche sotto inversione temporale.

Il quadrimomento e il tensore energia-impulso

In analogia a quanto fatto con la carica, si dimostra che si conserva anche il quadrimomento:

$$p^\nu = (\varepsilon, p^i)$$

Prima, alla carica avevamo associato una corrente j^μ tale che $\partial_\mu j^\mu = 0$; ora invece abbiamo un quadrivettore, al quale possiamo ad esempio associare una quantità $T^{\mu\nu}$ (fissato ν , è l'equivalente della corrente per la carica) che, affinché p^ν si conservi, sia un tensore (detto *tensore energia-impulso*) e soddisfi $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Analogamente a prima, supponiamo anche che $T^{\mu\nu} \rightarrow 0$ per $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ abbastanza velocemente. Sempre in analogia con j^μ , a partire da $T^{\mu\nu}$ possiamo costruire la quantità:

$$P_V^\mu = \int_V T^{0\mu} d^3\vec{x} \quad (1.4)$$

che è tale che:

$$\frac{dP_V^\mu}{dt} = - \int_{\partial V} T^{i\mu} d\Sigma_i \quad (1.5)$$

Se $V = \mathbb{R}^3$, allora $P^\mu = P_{\mathbb{R}^3}^\mu$ sarà conservato e sarà pure un quadrivettore. Non ci riaddentriamo in questi conti, che sono già stati fatti in altri corsi.

Le varie componenti di $T^{\mu\nu}$ hanno diversi significati fisici:

- T^{00} è la densità d'energia (vedi (1.4))
- T^{0i} è la densità di quantità di moto lungo i (vedi (1.4))
- T^{i0} è il flusso di energia (vedi (1.5))
- T^{ij} è il flusso di quantità di moto lungo j (vedi (1.5))

In una teoria Lorentz-invariante si può sempre fare in modo (lo vedremo più precisamente in seguito) che $T^{\mu\nu}$ sia simmetrico. Ciò implica, ad esempio, che $T^{i0} = T^{0i}$: apparentemente però queste due componenti del tensore energia-impulso sembravano avere significati fisici diversi. In realtà ciò non è del tutto vero: consideriamo infatti un carrello che può scorrere su dei binari in assenza di qualunque tipo di resistenza (attriti ecc.). Supponiamo che su questo carrello sia presente una lampadina, che a un certo punto emette luce: sarà quindi osservabile un flusso di energia $T^{i0} \neq 0$ attraverso il carrello, ossia equivalentemente un flusso di massa, e pertanto sembrerebbe che il centro di massa del sistema si sposti senza l'azione di forze esterne. Nel momento in cui la lampadina viene accesa, però, per la conservazione della quantità di moto il carrello acquisterà un certo \vec{p} , e pertanto sarà osservabile anche un $T^{0i} \neq 0$. Imponendo che il centro di massa del sistema non si sposti risulta proprio $T^{i0} = T^{0i}$.

Ricaviamo ora l'espressione esplicita di $T^{\mu\nu}$. Consideriamo dunque l'equazione di Maxwell in forma covariante, e moltiplichiamola ad ambo i membri per $F_\nu{}^\lambda$:

$$F_\nu{}^\lambda \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu F_\nu{}^\lambda$$

Dunque, considerando il primo membro:

$$F_\nu{}^\lambda \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (F_\nu{}^\lambda F^{\mu\nu}) - (\partial_\mu F_\nu{}^\lambda) F^{\mu\nu}$$

Il secondo contributo è pari a:

$$-\eta^{\lambda\alpha} (\partial_\mu F_{\nu\alpha}) F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (\partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha}) F^{\mu\nu} =$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che, rinominando gli indici, $\partial_\mu F_{\nu\alpha} F^{\mu\nu} = \partial_\nu F_{\mu\alpha} F^{\nu\mu} = -\partial_\nu F_{\mu\alpha} F^{\mu\nu}$. Dunque:

$$= -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu}) F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (\partial_\alpha F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} =$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che, considerando l'identità di Bianchi scritta come permutazione degli indici, $\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = -\partial_\alpha F_{\mu\nu}$. Dunque:

$$= \frac{1}{4} \eta^{\lambda\alpha} \partial_\alpha (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \partial_\mu \left(\frac{1}{4} \eta^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo rinominato gli indici. Pertanto:

$$F_\nu^\lambda \partial_\mu F^{\mu\nu} = +\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} \eta^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

Cerchiamo ora di riscrivere il termine dell'equazione con j^ν ; considerando il caso in cui j^ν sia generata da una particella carica (nel caso generale di più particelle cariche la quadricorrente totale sarà ovviamente la somma delle quadricorrenti delle singole particelle):

$$j^\nu(x) = e \int \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) d\lambda = e \int u^\nu \delta^{(4)}(x - x(s)) ds$$

Dunque:

$$j^\nu(x) F_\nu^\lambda(x) = e \int u^\nu \delta^{(4)}(x - x(s)) F_\nu^\lambda(x(s)) ds$$

ove abbiamo potuto scrivere $F_\nu^\lambda(x(s))$ al posto di $F_\nu^\lambda(x)$ per la presenza della δ .

Per l'equazione di Lorentz¹³, $m \frac{du^\mu}{ds} = e F^{\mu\nu}(x(s)) u_\nu$; dunque:

$$j^\nu(x) F_\nu^\lambda(x) = -m \int \frac{du^\lambda}{ds}(s) \delta^{(4)}(x - x(s)) ds = m \int u^\lambda \frac{d}{ds} \delta^{(4)}(x - x(s)) ds = -m \int u^\lambda(s) u^\mu(s) \partial_\mu \delta^{(4)}(x - x(s)) ds$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che:

$$\frac{d}{ds} \delta^{(4)}(x - x(s)) = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\mu(s)} \delta^{(4)}(x - x(s)) = -u^\mu \partial_\mu \delta^{(4)}(x - x(s))$$

Dunque:

$$j^\nu(x) F_\nu^\lambda(x) = -\partial_\mu \left[m \int u^\lambda(s) u^\mu(s) \delta^{(4)}(x - x(s)) ds \right]$$

Per concludere, quindi, ponendo:

$$T_{\text{emg}}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F_\rho^\nu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$T_P^{\mu\nu} = m \int u^\mu(s) u^\nu(s) \delta^{(4)}(x - x(s)) ds$$

si ha:

$$\partial_\mu (T_{\text{emg}}^{\mu\nu} + T_P^{\mu\nu}) = 0$$

Prendiamo quindi come tensore energia impulso:

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{emg}}^{\mu\nu} + T_P^{\mu\nu}$$

Il tensore energia-impulso delle particelle può essere riscritto come:

$$T_P^{\mu\nu}(x) = m \int u^\mu u^\nu \delta^{(4)}(x - x(s)) ds = m \int u^\mu u^\nu \delta(x^0 - x^0(s)) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(s)) ds$$

Usiamo la prima δ per ricavare $s = s(x^0) = s(t)$; dunque:

$$T_P^{\mu\nu}(x) = m u^\mu u^\nu \frac{1}{\frac{dx^0}{ds}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(s(t))) = m \frac{u^\mu u^\nu}{\gamma} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)) = \frac{p^\mu p^\nu}{\epsilon} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

ove nell'ultimo passaggio si è moltiplicato e diviso per m .

Il quadrimomento totale avrà un contributo dal tensore energia-impulso dei campi e delle particelle:

$$P^\mu = \int T_{\text{emg}}^{0\mu} d^3\vec{x} + \int T_P^{0\mu} d^3\vec{x}$$

(ed è ovviamente una quantità conservata).

¹³Stiamo implicitamente supponendo che la carica che genera il campo sia esattamente uguale a quella che interagisce con i campi (talvolta dette, rispettivamente, *carica attiva* e *passiva*). È un fatto sperimentale che le due coincidano (o meglio, che il loro rapporto sia costante e posto pari ad 1).

Il momento angolare

L'ultima legge di conservazione che ci resta da trattare è quella del momento angolare.

Assumiamo che esista il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ con le proprietà che abbiamo detto (è conservato e simmetrico). Definiamo allora una nuova quantità, che chiamiamo *tensore densità di momento angolare*:

$$M^{\mu\alpha\beta}(x) = x^\alpha T^{\mu\beta}(x) - x^\beta T^{\mu\alpha}(x)$$

Si vede che è un tensore antisimmetrico in α e β : $M^{\mu\alpha\beta} = -M^{\mu\beta\alpha}$; ci sono pertanto sei correnti conservate (le possibili scelte per i valori di α e β sono sei). Si verifica che effettivamente queste sei correnti sono conservate:

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta$$

Infatti:

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = \delta_\mu^\alpha T^{\mu\beta} + \underbrace{x^\alpha \partial_\mu T^{\mu\beta}}_{=0} - \delta_\mu^\beta T^{\mu\alpha} - \underbrace{x^\beta \partial_\mu T^{\mu\alpha}}_{=0} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} = 0$$

Ora: cosa sono le cariche associate a queste correnti? Sono (prevedibilmente) i momenti angolari:

$$L^{\alpha\beta} := \int_{\mathbb{R}^3} M^{0\alpha\beta} d^3\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dL^{\alpha\beta}}{dt} = 0$$

Tre di queste correnti sono effettivamente momenti angolari, le altre tre le vedremo in seguito (corrispondono a boost).

Supponiamo dunque di avere delle particelle cariche. Esplicitiamo $L^{\alpha\beta}$ (sfruttiamo l'espressione esplicita di $T^{\mu\nu}$ trovata prima):

$$L_P^{\alpha\beta} = \int \left(x^\alpha T_P^{0\beta} - x^\beta T_P^{0\alpha} \right) d^3\vec{x} = x^\alpha(t) p^\beta(t) - x^\beta(t) p^\alpha(t)$$

Dunque:

$$L_P^{ij} = x^i(t) p^j(t) - x^j(t) p^i(t)$$

è un tensore antisimmetrico in tre dimensioni. “Costruiamo” con esso il vettore:

$$L_P^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} L_P^{jk} = \epsilon^{ijk} x^j(t) p^k(t) = (\vec{x}(t) \times \vec{p}(t))^i$$

che è proprio il momento angolare della particella.

Da notare che la generalizzazione relativistica del momento angolare, che ovviamente è un vettore, non è un quadrivettore, come invece avviene per il quadrimomento.

Per ogni altro sistema, oltre alla particella libera, con tensore energia-impulso simmetrico e conservato esiste un momento angolare come quello che abbiamo definito. Ad esempio, nel caso dei campi elettromagnetici:

$$L_{\text{emg}}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} L_{\text{emg}}^{jk} = \epsilon^{ijk} \int x^j T_{\text{emg}}^{0k} d^3\vec{x} = \int \left[\vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \right]^i d^3\vec{x}$$

Ove $\vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{x} \times \vec{S}$ è la densità di momento angolare del campo elettromagnetico, che ovviamente è conservata.

Cosa significano le altre componenti di $L^{\alpha\beta}$, in particolare L^{0i} ?

$$K^i := L^{0i} = t \int T^{0i}(t) d^3\vec{x} - \int x^i(t) T^{00}(\vec{x}, t) d^3\vec{x}$$

Dunque, i K^i dipendono esplicitamente da t , a differenza di quanto visto finora. D'altra parte sappiamo che:

$$\frac{dK^i}{dt} = 0$$

perché $L^{\alpha\beta}$ è conservato. Qual è il significato fisico di queste leggi di conservazione?

$$K^i = tP^i - \mathcal{E} x_{\text{cdm}}^i(t)$$

ove x_{cdm}^i è l' i -esima coordinata del centro di massa del sistema, e \mathcal{E} è l'energia totale. In meccanica non relativistica, infatti, si definivano le coordinate del centro di massa di un sistema come:

$$x_{\text{cdm}}^i(t) = \frac{\int x^i \rho(\vec{x}, t) d^3\vec{x}}{\int \rho(\vec{x}, t) d^3\vec{x}}$$

In relatività si sostituisce alla densità ρ la densità d'energia, e dunque anche di massa, T^{00} . Dunque:

$$x_{\text{cdm}}^i = \frac{\int x^i T^{00}(\vec{x}, t) d^3\vec{x}}{\mathcal{E}}$$

Da notare che in questo modo, però, il centro di massa relativistico non è più un invariante, perché (t, x_{cdm}^i) non trasforma come un quadri-vettore. Sappiamo dunque che:

$$K^i = tP^i - \mathcal{E}x_{\text{cdm}}^i(t)$$

e poiché $dK^i/dt = 0$, $K^i(t) = K^i(0)$ e quindi:

$$K^i(0) = -\mathcal{E}x_{\text{cdm}}^i(0) \quad \Rightarrow \quad x_{\text{cdm}}^i(t) = t \frac{P^i}{\mathcal{E}} + x_{\text{cdm}}^i(0)$$

Anche in meccanica relativistica, dunque, per un sistema isolato il centro di massa si muove con velocità costante P^i/\mathcal{E} .

Capitolo 2

Il metodo variazionale

2.1 Variazioni ed equazioni del moto

2.1.1 Sistema con gradi di libertà finiti

Le leggi di conservazione che abbiamo visto finora non sono un “caso” dovuto alla struttura particolare delle equazioni del moto, ma derivano da un principio più profondo.

Supponiamo di avere un sistema con un numero finito N di gradi di libertà, che indicheremo con $\varphi_n(t)$ ($n = 1, \dots, N$). Come sappiamo, il nostro sistema sarà descritto dalla *lagrangiana*

$$L(\varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t)) = \sum_{n=1}^N L_n(\varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t))$$

A partire da questa si può costruire l’azione del sistema:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t)) dt$$

Che ovviamente è definita una volta determinati φ_n e $\dot{\varphi}_n$. Da un punto di vista matematico, si tratta di un funzionale:

$$I = I[\varphi_n(t)]$$

Le equazioni del moto del sistema sono equivalenti alle condizioni da porre sulle φ_n in modo da rendere I stazionario:

$$\delta I[\varphi_n(t)] = \frac{d}{d\alpha} I[\varphi_n(t) + \alpha \delta \varphi_n(t)]|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \delta \varphi_n$$

ove $\delta \varphi_n$ sono funzioni qualunque di t ma tali che $\delta \varphi_n(t_1) = \delta \varphi_n(t_2) = 0$. Spesso si scrive anche:

$$\delta I[\varphi_n(t)] = (I[\varphi_n + \delta \varphi_n] - I[\varphi_n])|_{\text{parte lineare in } \delta \varphi_n}$$

La condizione $\delta I[\varphi_n(t)] = 0$ restituisce come condizioni sulle φ_n le *equazioni di Eulero-Lagrange*:

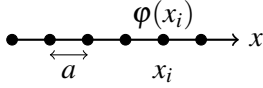
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_n} = 0$$

Il metodo variazionale è conveniente perché l’uso di una lagrangiana permette di capire facilmente le simmetrie di un sistema, e le simmetrie della lagrangiana “discendono” (vedremo poi come) alle equazioni del moto.

2.1.2 Sistema con gradi di libertà infiniti

Vogliamo ora estendere il tutto a sistemi con infiniti gradi di libertà, come i campi.

Supponiamo dunque di avere dei campi di qualunque tipo $\varphi_r(t, \vec{x})$ (con r indice discreto del campo); assumiamo ad esempio che φ_r viva su una retta, e consideriamo dei punti x_i su questa retta a distanza fissa a fra di loro, e forniamo i valori $\varphi(t, x^i)$ del campo in corrispondenza degli x_i . Si considera poi il limite $a \rightarrow 0$.



In generale un campo, dunque, può essere considerato come una collezione di funzioni $\varphi_{\vec{x}}(t)$, una per ogni \vec{x} ; la dipendenza di φ da \vec{x} può essere dunque pensata come un indice (stavolta continuo, non più discreto). La lagrangiana di un sistema del genere, dunque, sarà del tipo:

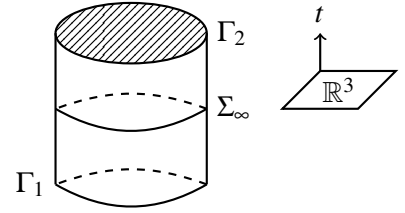
$$L = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(\varphi(t, \vec{x}), \partial_\mu \varphi(t, \vec{x})) d^3 \vec{x}$$

ove \mathcal{L} è detta *densità di lagrangiana*, e la derivata del campo è ∂_μ e non solo ∂_0 perché altrimenti non sarebbe invariante. La relativa azione sarà dunque:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), x) d^4 x$$

In linea di principio, I potrebbe dipendere esplicitamente da x , ma nei casi che considereremo ciò non avverrà.

L'integrale in $d^4 x$ che definisce I è esteso alla regione di spaziotempo compresa fra gli istanti t_1 e t_2 : la possiamo pensare come un cilindro le cui basi Γ_1 e Γ_2 sono lo spazio tridimensionale agli istanti $t = t_1$ e $t = t_2$, e il "bordo laterale" di questo cilindro è la sfera all'infinito, che indicheremo con Σ_∞ .



Infine, le condizioni al contorno per i campi sono le solite: si assume che

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

abbastanza velocemente. Anche in questo caso le equazioni del moto discenderanno da:

$$\delta I[\varphi, \partial_\mu \varphi] = 0$$

Le variazioni $\delta \varphi$ dei campi sono funzioni che, come i campi, si annullano all'infinito abbastanza velocemente, ma si devono annullare anche agli istanti t_1 e t_2 ; perciò, si dovrà avere $\delta \varphi(t_1, \vec{x}) = \delta \varphi(t_2, \vec{x}) = 0 \forall \vec{x}$.

La variazione di I è definita esattamente come prima:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} I[\varphi + \alpha \delta \varphi]_{\alpha=0}$$

Vediamo dunque che forma assumono le equazioni del moto dei campi:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta \varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi(x)} \delta \partial_\mu \varphi(x) \right] d^4 x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \frac{\partial_\mu \partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right) \right] d^4 x = \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial_\mu \partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \right] \delta \varphi d^4 x + \underbrace{\int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right) d^4 x}_{:=A} \end{aligned}$$

E poiché:

$$A = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi} \delta \varphi \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} d^3 \vec{x} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_\infty} d\Sigma^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \varphi} \delta \varphi dt = 0$$

(il primo contributo si annulla perché le variazioni di φ si annullano su Γ_1 e Γ_2 , mentre il secondo perché le variazioni di φ si annullano all'infinito) allora si avrà:

$$\delta I = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial_\mu \partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \right] \delta \varphi d^4 x = 0 \quad \forall \delta \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \frac{\partial_\mu \partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi(x)} = 0$$

che sono proprio le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi.

Affinché la nostra teoria abbia senso, bisogna che le equazioni del moto siano covarianti. Ciò avviene se I è invariante di Lorentz; a sua volta, ciò accade se e solo se la densità di lagrangiana \mathcal{L} è uno scalare di Lorentz:

$$I = \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) d^4 x$$

$$I' = \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_\mu \varphi'(x')) d^4 x' = \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial'_\mu \varphi'(x)) d^4 x$$

e affinché $I = I'$ è necessario che:

$$\mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_\mu \varphi'(x')) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$$

(ricordiamoci che i campi non sono necessariamente scalari, possono essere di qualunque tipo).

La densità di lagrangiana, poi, dev'essere *locale*. Ciò significa che dev'essere una funzione dei campi e delle loro derivate calcolati tutti nello stesso punto: l'evoluzione di un campo nel punto x infatti può essere influenzata solo dai valori del campo e delle sue derivate prime in x . Ad esempio, la densità di lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \int \varphi(x) \varphi(y) (x-y)^2 d^4 y$$

non è locale perché φ dipende sia da x che da y , anche se è invariante di Lorentz.

La densità di lagrangiana, inoltre, non è unica: esistono più densità di lagrangiana che generano le stesse equazioni del moto, ad esempio moltiplicando i campi per una costante o aggiungendoci una derivata totale. Supponiamo ora che:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu X^\mu(\varphi)$$

con X funzione generica. Allora:

$$I' = \int \mathcal{L}' d^4 x = I + \int \partial_\mu X^\mu(\varphi) d^4 x = I + \int X^0(\varphi(x)) d^3 \vec{x} \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_\infty} X^i d\Sigma^i(\varphi) dt$$

Ora, il secondo integrale è nullo perché, poiché i campi si annullano all'infinito, anche una qualunque loro funzione lo fa. Il primo integrale, invece, è un funzionale dipendente dai valori di φ su Γ_1 e Γ_2 : la variazione di questo termine è dunque nulla, perché nell'eseguirlo si valutano variazioni dei campi sulle due ipersuperfici, dove si annullano. Pertanto:

$$\delta I' = \delta I$$

2.2 La lagrangiana dell'elettrodinamica

Vogliamo ora scrivere esplicitamente la lagrangiana dell'elettrodinamica. Poiché campi e particelle interagiscono, scriveremo prima separatamente le lagrangiane di particelle e campi liberi per poi aggiungere il termine d'interazione.

2.2.1 Azione di una particella libera

In questo caso le variabili dinamiche sono le $x^\mu(\lambda)$, e quindi abbiamo un sistema con gradi di libertà finiti. Vogliamo dunque scrivere un'azione, cioè un funzionale di $x^\mu(\lambda)$, la cui variazione produca le equazioni "banali" della particella libera, cioè:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = 0$$

Questo funzionale dovrà essere invariante di Lorentz, ma anche di Poincaré (cioè invariante per traslazioni spazio-temporali); nella lagrangiana non potrà dunque comparire esplicitamente x^μ , ma solo le sue derivate. Inoltre, dovrà essere quadratica in $dx^\mu/d\lambda$, perché le equazioni del moto devono essere lineari.

L'unico invariante di Lorentz che possiamo costruire con le derivate di x^μ è il tempo proprio:

$$ds = \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} d\lambda$$

Si dovrà quindi avere:

$$I = \int f(s) ds$$

Che forma ha dunque $f(s)$?

La si determina imponendo che nel limite non relativistico I si riconduca all'azione classica di una particella libera, cioè:

$$I_{\text{class}} = \int \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt + \text{cost.}$$

Dunque:

$$ds = \sqrt{1 - v^2} dt \xrightarrow{v \ll 1} \left(1 - \frac{1}{2} v^2 \right) dt$$

Dunque, per confronto si ha $f(s) = -m$ (il termine che moltiplica 1 è costante, dunque lo si trascura perché la sua variazione è nulla). Pertanto:

$$I = -m \int ds$$

Poiché però I è funzionale di $x^\mu(\lambda)$, rendiamone esplicita la dipendenza:

$$I[x^\mu(\lambda)] = -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} d\lambda$$

A questo punto, supponendo ovviamente $\delta x^\mu(\lambda_1) = \delta x^\mu(\lambda_2) = 0$, facciamo la variazione di quest'azione:

$$\delta I[x^\mu(\lambda)] = -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}}} 2 \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta \frac{dx_\mu}{d\lambda} d\lambda = -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\frac{dx^\mu}{d\lambda}}{\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}}} \frac{d}{d\lambda} \delta x_\mu d\lambda$$

Sfruttiamo ora l'invarianza per riparametrizzazione, usando s come parametro:

$$\begin{aligned} \delta I[x^\mu(s)] &= -m \int_{s_1}^{s_2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d}{ds} \delta x_\mu ds = m \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x_\mu ds - \underbrace{m \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \delta x_\mu \right) ds}_{=0} \\ &= m \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x_\mu ds = 0 \quad \forall \delta x_\mu \Rightarrow m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{dp^\mu}{ds} = 0 \end{aligned}$$

Pertanto, l'azione di una particella libera è effettivamente:

$$I[x^\mu(\lambda)] = -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} d\lambda$$

2.2.2 Azione del campo elettromagnetico libero

Le nostre variabili dinamiche sono ora i campi. Potremmo ipotizzare che queste variabili siano direttamente le componenti del tensore $F^{\mu\nu}(x)$, e quindi potremmo provare a scrivere un'azione come funzionale di $F^{\mu\nu}(x)$. Ciò però non è possibile, perché le equazioni di Maxwell sono otto (quattro date da $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ e quattro da $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$), mentre $F^{\mu\nu}$ ha solo sei componenti indipendenti: effettuando la variazione di un funzionale di $F^{\mu\nu}$ otterremmo quindi solo sei equazioni.

Per utilizzare il formalismo lagrangiano in elettrodinamica è necessario pensare ai potenziali $A^\mu(x)$ come variabili dinamiche: si tratta infatti di quattro variabili, e in termini di esse $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ è un'identità, e dunque le uniche equazioni che restano da imporre sono $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, che sono proprio quattro. Dobbiamo pensare all'azione di un campo elettromagnetico libero come un funzionale di $A^\mu(x)$, ossia:

$$I[A^\mu(x)] = \int \mathcal{L}(A^\mu(x), \partial^\nu A^\mu(x)) d^4x$$

Dobbiamo quindi lavorare con entità che non sono direttamente quantità fisiche, per via dell'invarianza di gauge.

Come possiamo dunque scrivere I di modo che sia invariante di gauge? Sicuramente non potrà comparire direttamente A_μ ; l'unico oggetto costruito con esso che è gauge-invariante è $F^{\mu\nu}$. Pertanto \mathcal{L} potrà dipendere solo dalle derivate prime di A^μ , e nella forma di $F^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu}(x))$$

Inoltre, siccome le equazioni dei campi sono lineari in $F^{\mu\nu}$, la lagrangiana che cerchiamo dovrà essere quadratica in $F^{\mu\nu}$. Gli unici invarianti quadratici che si possono costruire con $F^{\mu\nu}$ sono $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$. Dunque:

$$\mathcal{L} = \alpha F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \beta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

In realtà però dev'essere $\beta = 0$, perché l'elettrodinamica è invariante sotto parità, mentre $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è pseudoscalare sotto parità. Se anche fosse $\beta \neq 0$, il secondo contributo non avrebbe effetti sulle equazioni del moto: è infatti possibile dimostrare che esiste un quadrivettore X^μ tale che $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \partial_\mu X^\mu$.

Anche la costante α non ha effetti sulle equazioni del moto, perché infatti moltiplicare la lagrangiana per una costante non ne altera le equazioni di Eulero-Lagrange; convenzionalmente (vedremo fra poco perché), si pone $\alpha = -1/4$. Quindi:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

e le sue equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = 0$$

(infatti il termine contenente ∂A_ν è nullo perché \mathcal{L} non dipende da A_ν ma dalle sue derivate). Calcoliamo dunque la variazione dell'azione:

$$\begin{aligned} \delta I_A[A_\mu] &= \delta \left(-\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} d^4x \right) = -\frac{1}{2} \int F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4x = \\ &= -\frac{1}{2} \int F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) d^4x = - \int F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu d^4x = \int \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x \end{aligned}$$

(i termini di bordo si annullano perché A_ν si annulla all'infinito). Dunque:

$$\delta I_A = 0 \quad \forall \delta A_\nu \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

2.2.3 Azione d'interazione campo-particella

Vogliamo ora riprodurre i termini d'interazione campo-particella, ossia vogliamo riprodurre le equazioni di Maxwell nella forma $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$.

Supponiamo che j^ν sia una sorgente esterna, cioè non dipendente dai campi, tale che $\partial_\nu j^\nu = 0$. Dobbiamo dunque aggiungere alla lagrangiana dei campi liberi il termine $j^\nu A_\nu$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu$$

Infatti:

$$\delta I = -\frac{1}{4} \delta \int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} d^4x - \delta \int j^\nu A_\nu d^4x = \int \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x - \int j^\nu \delta A_\nu d^4x$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che j^ν non dipende dai campi, e quindi la variazione agisce solo su A_ν . Pertanto:

$$\delta I = 0 \quad \forall \delta A_\nu \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Si potrebbe obiettare che si è aggiunto a \mathcal{L} un termine contenente direttamente A_ν . In realtà ciò non ha effetti sulle equazioni del moto; se infatti effettuiamo la trasformazione di gauge $A_\nu \rightarrow A_\nu + \partial_\nu \Lambda$ si ha:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - j^\nu \partial_\nu \Lambda = \mathcal{L} - \partial_\nu (j^\nu \Lambda)$$

e dunque poiché \mathcal{L} è invariante di gauge a meno di quadridivergenze, l'azione è invariante di gauge.

2.2.4 Azione totale dell'elettrodinamica

Vogliamo dunque scrivere esplicitamente la lagrangiana dell'elettrodinamica, ossia quella contenente i termini relativi sia ai campi che alle particelle.

Chiamiamo innanzitutto $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $\mathcal{L}_I = -j^\nu A_\nu$.

Poiché stavolta j^ν dipende dalle traiettorie delle particelle:

$$j^\mu(x) = e \int \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) d\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_I = \int \mathcal{L}_I d^4x = -e \int \int \frac{dx^\mu}{d\lambda} A_\mu(x) \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) d^4x d\lambda = -e \int \frac{dx^\mu}{d\lambda} A_\mu(x(\lambda)) d\lambda \left(= -e \int_\gamma A_\mu dx^\mu \right)$$

Questa scrittura ha anche un significato geometrico semplice: è l'integrale di linea di A_μ lungo la linea d'universo della particella.

Dunque, l'azione totale dell'elettrodinamica sarà:

$$I_{\text{TOT}}[A_\mu(x), x^\mu(\lambda)] = I_A[A_\mu(x)] + I_P[x^\mu(\lambda)] + I_I[A_\mu(x), x^\mu(\lambda)]$$

ove I_P è l'azione della particella libera. Le equazioni del moto discenderanno dalla condizione che la variazione di I_{TOT} sia rispetto ad A_μ che a x^μ sia nulla. Dunque:

$$\delta_{A_\mu} I_{\text{TOT}} = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

(e lo avevamo già visto). Inoltre:

$$\delta_{x^\mu} I_{\text{TOT}} = \delta_{x^\mu} I_P[x^\mu(\lambda)] + \delta_{x^\mu} I_I[A_\mu(x), x^\mu(\lambda)]$$

$$\begin{aligned} \delta_{x^\mu} I_I[A_\mu(x), x^\mu(\lambda)] &= \delta_{x^\mu} \left[-e \int \frac{dx^\mu}{d\lambda} A_\mu(x(\lambda)) d\lambda \right] = -e \int \left(\frac{d}{d\lambda} \delta x^\mu \cdot A_\mu(x(\lambda)) + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta A_\mu(x(\lambda)) \right) d\lambda = \\ &= -e \int \left(\frac{d}{d\lambda} \delta x^\nu \cdot A_\nu(x(\lambda)) + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\nu A_\mu(x(\lambda)) \delta x^\nu \right) d\lambda = e \int \delta x^\nu \left(\frac{d}{d\lambda} A_\nu(x(\lambda)) - \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\nu A_\mu(x(\lambda)) \right) d\lambda = \\ &= e \int \delta x^\nu \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu A_\nu(x(\lambda)) - \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\nu A_\mu(x(\lambda)) \right) d\lambda = e \int \frac{dx^\mu}{d\lambda} F_{\mu\nu}(x(\lambda)) \delta x^\nu d\lambda = e \int \frac{dx^\mu}{ds} F_{\mu\nu}(x(s)) \delta x^\nu ds \end{aligned}$$

Dunque:

$$\delta_{x^\mu} I_{\text{TOT}} = \int \left(\frac{dp^\nu}{ds} + e F_{\mu}{}^\nu(x(s)) u^\mu \right) \delta x_\nu ds$$

Pertanto, la condizione $\delta_{x^\mu} I_{\text{TOT}} = 0$ per ogni variazione di x^ν restituisce le equazioni di Lorentz ($dp^\mu/ds = e F^\mu{}_\nu u^\nu$).

Pertanto, la lagrangiana totale dell'elettrodinamica è:

$$\mathcal{L}_{\text{TOT}} = -m \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - e \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) A_\mu(x(\lambda))$$

2.3 Il teorema di Noether

Una generica teoria di campo descriverà un sistema attraverso delle funzioni $\varphi_r(x)$ e una densità di lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r, x)$. Supponiamo che questa teoria abbia delle simmetrie che costituiscono un gruppo continuo, ossia connesso con continuità all'identità (per cui ha senso parlare di trasformazioni infinitesime).

Vogliamo dimostrare che in conseguenza di questa simmetria, se valgono le equazioni di Eulero-Lagrange esiste una corrente J^μ conservata, ossia tale che $\partial_\mu J^\mu = 0$. Questo risultato va sotto il nome di *teorema di Noether*.

Consideriamo dunque una trasformazione infinitesima del tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x)$, e sulla correzione δx^μ per ora non supponiamo nulla. Assumiamo però che anche i campi si trasformino: $\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x') = \varphi_r(x) + \delta \varphi_r(x)$. Definiamo:

$$\delta \varphi_r(x) := \varphi'_r(x) - \varphi_r(x)$$

detta *variazione in forma* del campo; questa definizione è dovuta al fatto che $\bar{\delta}\varphi_r(x)$ non commuta con le derivate rispetto a x^μ perché in essa i campi sono valutati in punti diversi. Con questa definizione, invece:

$$\delta\partial_\mu\varphi_r(x) = \partial_\mu\delta\varphi_r(x)$$

Ovviamente, poi, si ha (trascurando termini di ordine superiore in δx e $\delta\varphi$):

$$\varphi'_r(x) = \varphi'_r(x + \delta x) = \varphi'_r(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi'_r(x) + O(\delta x)^2 = \varphi'_r(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_r(x) + O(\delta x, \delta\varphi)^2$$

e δ e $\bar{\delta}$ risultano collegate:

$$\delta\varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_r(x) - \varphi_r(x) = \bar{\delta}\varphi_r(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_r(x) \Rightarrow \delta\varphi_r(x) = \bar{\delta}\varphi_r(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_r(x)$$

Supponiamo poi che l'azione $I = \int \mathcal{L} d^4x$ sia invariante sotto le trasformazioni infinitesime che stiamo considerando; in particolare, assumiamo che $\mathcal{L} d^4x$ sia invariante. Ciò significa che la parte lineare di

$$\mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial'_\mu \varphi'_r(x'), x') d^4x' - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x), x) d^4x$$

è nulla.

Trascurando i termini in $\partial_\mu \delta x^\mu$ oltre il primo ordine:

$$\begin{aligned} d^4x' &= \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x \\ \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| &= \det \begin{pmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & \partial_1 \delta x^0 & \partial_2 \delta x^0 & \partial_3 \delta x^0 \\ \partial_0 \delta x^1 & 1 + \partial_1 \delta x^1 & \partial_2 \delta x^1 & \partial_3 \delta x^1 \\ \partial_0 \delta x^2 & \partial_1 \delta x^2 & 1 + \partial_2 \delta x^2 & \partial_3 \delta x^2 \\ \partial_0 \delta x^3 & \partial_1 \delta x^3 & \partial_2 \delta x^3 & 1 + \partial_3 \delta x^3 \end{pmatrix} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu + O(\delta x)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d^4x' = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x + O(\delta x)^2 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial'_\mu \varphi'_r(x'), x') d^4x' - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x), x) d^4x \Big|_{\text{lin}} = \\ &= \underbrace{\mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial'_\mu \varphi'_r(x'), x') d^4x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu)}_{:=A} - \underbrace{\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x), x) d^4x}_{:=B} - \\ &\quad - \underbrace{\mathcal{L}(\varphi'_r(x), \partial_\mu \varphi'_r(x), x) d^4x}_{:=C} + \underbrace{\mathcal{L}(\varphi'_r(x), \partial_\mu \varphi'_r(x), x) d^4x}_{:=D} \Big|_{\text{lin}} = \\ &= \left[\underbrace{\delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}}_{A+C} + \sum_r \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \delta \varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \delta \partial_\mu \varphi_r \right)}_{B+D} \right] d^4x = \\ &= \left\{ \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) + \sum_r \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \delta \varphi_r \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \right) \delta \varphi_r \right] \right\} d^4x \end{aligned}$$

Dunque, se $\mathcal{L} d^4x$ è invariante rispetto alla simmetria e sono verificate le equazioni del moto, allora:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{con} \quad J^\mu = \delta x^\mu \mathcal{L} + \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \delta \varphi_r$$

La corrente J^μ non è univocamente definita; consideriamo infatti:

$$\tilde{J}^\mu = J^\mu + \partial_\nu X^{\mu\nu}$$

con $X^{\mu\nu}$ generico tensore antisimmetrico funzione dei campi e/o delle loro derivate. Allora:

$$\partial_\mu \tilde{J}^\mu = \partial_\mu J^\mu + \partial_{(\mu} \partial_{\nu)} X^{[\mu\nu]} = 0$$

e pertanto anche \tilde{J} è conservata.

Alla corrente J^μ è associata una carica conservata (se i campi si annullano abbastanza velocemente all'infinito):

$$Q = \int J^0 d^3\vec{x} \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Il dubbio che dunque può sorgere è: J^μ e \tilde{J}^μ generano cariche diverse?

$$\tilde{Q} = \int \tilde{J}^0 d^3\vec{x} = Q + \int \partial_\nu X^{0\nu} d^3\vec{x} = Q + \int \partial_i X^{0i} d^3\vec{x} = Q + \int_{\Sigma_\infty} X^{0i} d\Sigma_i$$

Ma X si annulla all'infinito perché così fanno i campi dei quali è funzione. Pertanto l'integrale è nullo e:

$$\tilde{Q} = Q$$

Dunque, anche se la corrente conservata non è univocamente definita, la relativa carica lo è.

2.3.1 Simmetrie interne e esterne

Sappiamo dunque che per il teorema di Noether se un sistema ha un gruppo di simmetria c'è una corrente conservata, la cui forma è:

$$J^\mu = \delta x^\mu \mathcal{L} + \delta \varphi_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r}$$

Considerando anche le variazioni:

$$\bar{\delta} \varphi_r = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x) \quad \delta \varphi_r = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x)$$

e tenendo conto del fatto che:

$$\delta \varphi_r = \bar{\delta} \varphi_r - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi_r$$

possiamo scrivere:

$$J^\mu = \delta x^\nu \underbrace{\left(\delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} - \partial_\nu \varphi_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \right)}_{:= \tilde{T}^\mu{}_\nu} + \bar{\delta} \varphi_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r}$$

ove abbiamo definito il *tensore energia-impulso*:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \partial^\nu \varphi_r - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Considereremo due tipi di simmetrie:

simmetrie interne: sono trasformazioni che agiscono sui campi ma non sui punti dello spaziotempo. Si ha dunque $\delta x^\mu = 0$ e $\bar{\delta} \varphi_r \neq 0$

simmetrie esterne: agiscono anche sui punti; $\delta x^\mu, \bar{\delta} \varphi_r \neq 0$

Nel caso dell'elettrodinamica non ci sono simmetrie interne (le trasformazioni di Poincaré sono simmetrie esterne).

Simmetrie interne

Per trattare simmetrie interne dobbiamo dunque considerare altre teorie di campo.

Un esempio di questo tipo di teorie è una teoria con campo $\Phi(x)$ scalare e complesso ($\Phi'(x') = \Phi(x)$ per trasformazioni di Lorentz, e $\Phi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ con φ_1, φ_2 campi reali). Indichiamo con Φ^* il complesso coniugato di Φ .

Si tratta di campi utili per formulare “teorie efficaci”, cioè teorie valide solo a determinate scale di energia (ad esempio, i pioni possono essere descritti da campi scalari complessi).

La lagrangiana di una tale teoria dovrà essere nella forma:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^* \Phi)^2 + \dots$$

ove il primo addendo è l’oggetto più semplice che sia invariante di Lorentz e che coinvolga le derivate di Φ ; inoltre compaiono Φ e Φ^* perché vogliamo che la densità di lagrangiana sia reale.

Considerando Φ e Φ^* come campi indipendenti, possiamo prendere la variazione di \mathcal{L} rispetto a Φ e Φ^* . Si avrà dunque:

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} + \frac{\partial_\mu \partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^*} = 0 \quad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} + \frac{\partial_\mu \partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = 0$$

ove la prima è l’equazione del moto per Φ e l’altra, la sua complessa coniugata, quella per Φ^* . Scriviamo esplicitamente la prima:

$$m^2 \Phi + \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi) \Phi + \partial_\mu \partial^\mu \Phi = 0$$

In generale, quest’equazione non è semplice da risolvere per via del termine contenente λ , detto *termine d’interazione*. Nel caso $\lambda = 0$, l’equazione è lineare in Φ e descrive la cosiddetta *teoria libera*, ossia quella nella quale le equazioni sono, appunto, lineari:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0$$

Una soluzione di quest’equazione può essere $\Phi = \Phi_0 e^{ipx}$ con Φ_0 e p costanti. Inserendola nell’equazione:

$$-p^2 \Phi + m^2 \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 = m^2$$

e dunque p soddisfa la relazione tipica del quadrimomento di una particella di massa m .

La lagrangiana \mathcal{L} ha sicuramente tutte le simmetrie del gruppo di Poincaré (che poi vedremo), ma anche la simmetria interna:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu \quad \Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha} \Phi(x)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ costante indipendente da x ; ovviamente vale anche la relazione complesso coniugata:

$$\Phi^*(x) \longrightarrow \Phi^{*'}(x) = e^{-i\alpha} \Phi^*(x)$$

e si ha anche:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Phi &\longrightarrow e^{i\alpha} \partial_\mu \Phi \\ \partial_\mu \Phi^* &\longrightarrow e^{-i\alpha} \partial_\mu \Phi^* \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

Applichiamo dunque a questa simmetria il teorema di Noether. Per farlo, consideriamo trasformazioni infinite-sime, ossia con $\alpha \ll 1$:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha + o(\alpha^2) \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x) = (1 + i\alpha) \Phi(x) + o(\alpha^2) \\ &\Rightarrow \quad \delta \Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) = i\alpha \Phi(x) \end{aligned}$$

(in questo caso $\delta = \bar{\delta}$ perché $\delta x^\mu = 0$). Dunque:

$$J^\mu = \bar{\delta} \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} + \bar{\delta} \Phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^*} = i\alpha (\Phi \partial^\mu \Phi^* - \Phi^* \partial^\mu \Phi)$$

Si verifica che se valgono le equazioni del moto allora $\partial_\mu J^\mu = 0$. Esiste dunque una carica conservata:

$$Q = \int J^0 d^3 \vec{x} \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Non possiamo mostrare qual è il suo significato fisico perché abbiamo bisogno di concetti di meccanica quantistica dei quali ancora non disponiamo, ma sarebbe la differenza fra il numero di particelle e di antiparticelle del sistema (il campo, se quantizzato, è descritto da un sistema di particelle e antiparticelle).

Simmetrie esterne

Vediamo ora un'applicazione del teorema di Noether su simmetrie esterne, come le trasformazioni di Poincaré. Dobbiamo dunque determinare δx^μ e $\bar{\delta}\varphi_r$:

$$\delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu - m^\mu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)x^\nu + a^\mu - x^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

con $|a| \ll 1$ e $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Per quanto riguarda invece $\bar{\delta}\varphi_r$:

- Se φ è scalare:

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \Rightarrow \bar{\delta}\varphi = 0$$

- Se φ_r è un campo vettoriale, ad esempio $\varphi_r = A_\mu$:

$$A'_\mu(x') = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu A_\nu(x) = (\delta_\mu{}^\nu + \omega_\mu{}^\nu)A_\nu(x) \Rightarrow \bar{\delta}A_\mu(x) = \omega_\mu{}^\nu A_\nu(x) = \omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}A_\rho(x)$$

- Se φ_r è un campo tensoriale, in generale:

$$\bar{\delta}\varphi_r = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})_r{}^s\varphi_s \quad (2.1)$$

con $(\Sigma^{\mu\nu})_r{}^s$ tensore

Assumiamo, senza ledere in generalità, che:

$$(\Sigma^{\mu\nu})_r{}^s = -(\Sigma^{\nu\mu})_r{}^s$$

Infatti, se Σ avesse una componente simmetrica, questa non contribuirebbe nella (2.1) perché è moltiplicato per ω , che è antisimmetrico.

Che forma ha Σ ?

Dipende dal “significato” dell'indice r , ossia dal tipo di campo in questione. Se ad esempio il campo è scalare $(\Sigma^{\mu\nu})_r{}^s = 0$; se invece $\varphi_r = A_\alpha$:

$$\bar{\delta}A_\alpha = \omega_{\alpha\nu}\eta^{\nu\beta}A_\beta = \omega_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\eta^{\nu\beta}A_\beta = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\alpha\eta^{\nu\beta} - \delta^\nu{}_\alpha\eta^{\mu\beta})A_\beta$$

Dunque:

$$(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \delta^\mu{}_\alpha\eta^{\nu\beta} - \delta^\nu{}_\alpha\eta^{\mu\beta}$$

Simmetrie di Poincaré

Deriviamo dunque la forma esplicita della corrente associata alle simmetrie di Poincaré:

$$J^\mu = -\delta x_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} + \bar{\delta}\varphi_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r}$$

ove abbiamo definito il *tensore energia-impulso*:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \partial^\nu \varphi_r - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Quindi:

$$J^\mu = -(a_\nu + \omega_{\nu\lambda}x^\lambda)\tilde{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\nu\lambda}(\Sigma^{\nu\lambda})_r{}^s\varphi_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} = -a_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\nu\lambda} \left(-x^\lambda \tilde{T}^{\mu\nu} + x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda} + (\Sigma^{\nu\lambda})_r{}^s\varphi_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \right)$$

Definendo il *tensore densità di momento angolare*¹:

$$\tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = -x^\lambda \tilde{T}^{\mu\nu} + x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda} + (\Sigma^{\nu\lambda})_r{}^s\varphi_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r}$$

¹ Poniamo anche:

$$Y^{\mu\nu\lambda} = (\Sigma^{\nu\lambda})_r{}^s\varphi_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r}$$

si ha dunque:

$$J^\mu = -a_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\nu\lambda} \tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$$

Da notare che \tilde{M} è antisimmetrico in ν e λ ($\tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = -\tilde{M}^{\mu\lambda\nu}$) e vale inoltre:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \forall a_\nu, \omega_{\nu\lambda}$$

Quindi, le quantità $a_\nu \tilde{T}^{\mu\nu}$ e $\omega_{\nu\lambda} \tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$ sono conservate:

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu \tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = 0$$

La prima segue in realtà dall'invarianza della lagrangiana per traslazioni, mentre la seconda è conseguenza dell'invarianza per trasformazioni di Lorentz.

Dunque, in una teoria di campo invariante per trasformazioni di Poincaré esistono un tensore energia-impulso $\tilde{T}^{\mu\nu}$ e un tensore densità di momento angolare $\tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$ conservati.

In realtà, queste due grandezze che abbiamo ricavato ora non sono direttamente uguali a quelle che avevamo determinato precedentemente.

Innanzitutto, si aveva $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Poiché:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \partial^\nu \varphi_r - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

L'eventuale simmetria di \tilde{T} dipende dalla forma di \mathcal{L} , e non è evidente. Consideriamo dunque degli esempi:

1. Se φ è un campo scalare reale (il fattore $\frac{1}{2}$ è messo per convenienza):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu}$$

Dunque, in questo caso il tensore energia-impulso è simmetrico

2. Se φ_r è un quadrivettore, ad esempio A_μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

e allora:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\lambda} \partial^\nu A_\lambda - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Poiché:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\lambda} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \partial_\mu A_\lambda} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\lambda - \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu) = -F^{\mu\lambda}$$

allora:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Si presentano però due problemi:

- $\tilde{T}^{\mu\nu}$ non è simmetrico
- $\tilde{T}^{\mu\nu}$ non è invariante di gauge

La prima questione deriva dal fatto che $Y^{\mu\nu\lambda}$ non è nullo perché $(\Sigma^{\nu\lambda})_r^s \neq 0$. Se però valgono entrambe le conservazioni del tensore energia impulso e densità di momento angolare, allora:

$$\partial_\mu \tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = \tilde{T}^{\nu\lambda} - \tilde{T}^{\lambda\nu} + \partial_\mu Y^{\mu\nu\lambda} = 0$$

Se poi la teoria è invariante di Lorentz, $Y^{\mu\nu\lambda} = 0$ (perché $\bar{\delta}\varphi = 0$) e dunque $\tilde{T}^{\nu\lambda} = \tilde{T}^{\lambda\nu}$.

Ci chiediamo dunque che relazione ci sia fra \tilde{T} e il tensore energia impulso T che avevamo determinato in 1.5.6.

Ricordiamoci innanzitutto che la corrente di Noether non è univocamente determinata: J^μ e $J^\mu + \partial_\lambda X^{\lambda\mu}$, con $X^{\lambda\mu}$ antisimmetrico, danno luogo alle stesse equazioni del moto. Potremmo dunque scrivere:

$$T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} + \partial_\lambda X^{\lambda\mu\nu}$$

con $X^{\lambda\mu\nu} = -X^{\mu\lambda\nu}$; in questo modo, siamo sicuri che vale $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, e la carica associata a T è la stessa di \tilde{T} :

$$\int T^{0\nu} d^3\vec{x} = \int \tilde{T}^{0\nu} d^3\vec{x}$$

Dobbiamo dunque capire che forma abbia $X^{\lambda\mu\nu}$ affinché $T^{\mu\nu}$ sia simmetrico. Poiché sappiamo che:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} - \tilde{T}^{\nu\mu} + \partial_\lambda Y^{\lambda\mu\nu} = 0 \quad \text{con} \quad Y^{\lambda\mu\nu} = -Y^{\lambda\nu\mu} \quad (2.2)$$

potremmo porre:

$$X^{\lambda\mu\nu} = \alpha(Y^{\lambda\mu\nu} - Y^{\mu\lambda\nu})$$

(in questo modo X è antisimmetrico in λ e μ). Con questa scelta si ha:

$$T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} + \alpha(\partial_\lambda Y^{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda Y^{\mu\lambda\nu}) = \tilde{T}^{\mu\nu} + \alpha(-\tilde{T}^{\mu\nu} + \tilde{T}^{\nu\mu}) - \alpha\partial_\lambda Y^{\mu\lambda\nu}$$

Ora, se α fosse uguale a $\frac{1}{2}$, i primi due termini darebbero luogo alla parte simmetrica di $\tilde{T}^{\mu\nu}$, ossia si avrebbe:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\tilde{T}^{\mu\nu} + \tilde{T}^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\partial_\lambda Y^{\mu\lambda\nu}$$

Il secondo termine però non è simmetrico, a meno che al suo posto non ci sia $\partial_\lambda(Y^{\mu\lambda\nu} + Y^{\nu\lambda\mu})$. Dobbiamo dunque porre:

$$X^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(Y^{\lambda\mu\nu} - Y^{\mu\lambda\nu} - Y^{\nu\lambda\mu})$$

di modo che:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\tilde{T}^{\mu\nu} + \tilde{T}^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\partial_\lambda(Y^{\mu\lambda\nu} + Y^{\nu\lambda\mu})$$

e pertanto $T^{\mu\nu}$ stavolta risulta effettivamente simmetrico.

Ci resta però da verificare se $X^{\lambda\mu\nu}$ è antisimmetrico rispetto a μ e λ : questo però è sicuramente vero, perché la differenza dei due primi Y lo è, così come l'ultima Y lo è per la (2.2).

In generale, dunque, il tensore energia-impulso non è simmetrico, ma se il sistema è invariante per trasformazioni di Lorentz allora vale la (2.2) e quindi T può essere reso simmetrico come abbiamo visto (o meglio, esiste un T simmetrico equivalente a \tilde{T}).

Verifichiamo ora che nel caso dell'elettromagnetismo questa "ricetta" funziona. Abbiamo che:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}\partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

Inoltre:

$$Y^{\mu\nu\lambda} = (\Sigma^{\nu\lambda})_\alpha{}^\beta A_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\alpha} = (\delta^\nu{}_\alpha \eta^{\lambda\beta} - \delta_\alpha{}^\lambda \eta^{\nu\beta}) A_\beta (-F^{\mu\alpha}) = -F^{\mu\nu} A^\lambda + F^{\mu\lambda} A^\nu \Rightarrow X^{\lambda\mu\nu} = -F^{\lambda\mu} A^\nu$$

Perciò:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}\partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \partial_\lambda(F^{\lambda\mu}A^\nu)$$

e dalla validità delle equazioni di Maxwell per il campo libero ($\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = 0$) si ha che $-\partial_\lambda(F^{\lambda\mu}A^\nu) = -(\partial_\lambda F^{\lambda\mu})A^\nu - F^{\lambda\mu}\partial_\lambda A^\nu = -F^{\lambda\mu}\partial_\lambda A^\nu$. Allora:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}(\partial^\nu A_\lambda - \partial_\lambda A^\nu) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

e risulta proprio $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

Sappiamo che l'invarianza del sistema per trasformazioni di Lorentz implica l'esistenza di un tensore $\tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$ conservato, ossia tale che $\partial_\mu \tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = 0$, e inoltre:

$$\tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda} - x^\lambda \tilde{T}^{\mu\nu} + Y^{\mu\nu\lambda}$$

Abbiamo poi già visto che se disponiamo di un tensore energia-impulso simmetrico e conservato, possiamo definire il tensore:

$$M^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\lambda T^{\mu\nu}$$

che, come conseguenza della simmetria di T , è conservato anch'esso; le sue componenti corrispondono ai momenti angolari e ai boost.

Sembrerebbe dunque che abbiamo due correnti distinte, M e \tilde{M} , ma in realtà sono fisicamente equivalenti; si può infatti verificare che:

$$M^{\mu\nu\lambda} = \tilde{M}^{\mu\nu\lambda} + \partial_\rho \mathcal{X}^{\rho\mu\nu\lambda} \quad \text{con} \quad \mathcal{X}^{\rho\mu\nu\lambda} = x^\nu X^{\rho\mu\lambda} - x^\lambda X^{\rho\mu\nu}$$

(e dunque $\mathcal{X}^{\rho\mu\nu\lambda}$ è antisimmetrico in ρ e μ).

Se il campo non è più libero, ossia se ci sono anche delle sorgenti, si dovrebbe ripercorrere lo stesso ragionamento a partire dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{\text{TOT}} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_I$$

Non ripercorriamo tutte le argomentazioni. Diciamo soltanto che risulta:

$$\tilde{T}_{\text{TOT}} = \tilde{T}_{\text{emg}} + T_P^{\mu\nu} + j^\mu A^\nu$$

ove il tensore energia-impulso delle particelle $T_P^{\mu\nu}$ risulta automaticamente simmetrico. Si pone poi:

$$T_{\text{TOT}} = \tilde{T}_{\text{TOT}} + \partial_\lambda X^{\lambda\mu\nu}$$

con lo stesso X di prima. Perciò:

$$T_{\text{TOT}}^{\mu\nu} = T_P^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + j^\mu A^\nu - \partial_\lambda (F^{\lambda\mu} A^\nu)$$

e poiché:

$$j^\mu A^\nu - \partial_\lambda (F^{\lambda\mu} A^\nu) = j^\mu A^\nu - \underbrace{(\partial_\lambda F^{\lambda\mu})}_{j^\mu} A^\nu - F^{\lambda\mu} \partial_\lambda A^\nu = -F^{\lambda\mu} \partial_\lambda A^\nu$$

risulta:

$$T_{\text{TOT}}^{\mu\nu} = T_P^{\mu\nu} + T_{\text{emg}}^{\mu\nu}$$

che è proprio quello che avevamo trovato in 1.5.6.

Perché un tensore energia-impulso simmetrico? Perché abbiamo speso così tanto tempo per dimostrare che in una teoria invariante per trasformazioni di Poincaré esiste un tensore energia-impulso simmetrico?

Un primo motivo l'avevamo già visto: la simmetria di $T^{\mu\nu}$ implica l'uguaglianza $T^{i0} = T^{0i}$, ossia implica che densità di quantità di moto e flusso di energia siano la stessa cosa.

Un altro motivo, più importante, è che vorremmo introdurre in una teoria di campo la gravità, e per fare questo è importante che $T^{\mu\nu}$ sia simmetrico. Vediamo un attimo perché facendo una piccola analogia con l'elettromagnetismo.

Le sorgenti del campo elettromagnetico sono le cariche, e ad esse è associata la corrente conservata j^μ ; questa genera il campo A_μ , e il termine della lagrangiana che "concretizza" quest'interazione è $\mathcal{L}_I = -j^\mu A_\mu$. Nel caso della gravità, invece, dovrebbero essere le masse le sorgenti del campo; poiché però massa ed energia sono la stessa cosa, e l'energia relativistica (ivi compreso anche il momento) si conserva, le "vere" sorgenti del campo gravitazionale sono p^μ , la cui conservazione deriva dalla conservazione di un tensore $T^{\mu\nu}$ (l'analogo di j^μ). Se

dunque sapessimo scrivere le equazioni del moto del campo gravitazionale si dovrebbe avere (cfr equazioni di Maxwell) “qualcosa = $T^{\mu\nu}$ ”.

Non è poi difficile capire quale sia l’analogo di \mathcal{L}_I per la gravità: l’analogo di A_μ è la metrica $g_{\mu\nu}(x)$ dello spazio, che ovviamente è un oggetto simmetrico in μ e ν (come η); perciò, l’analogo della lagrangiana d’interazione per la gravità è:

$$\mathcal{L}_I \propto T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$$

(in realtà questa relazione vale solo per campi gravitazionali deboli). Ciò ha però senso solo se $T^{\mu\nu}$ è simmetrico: è per questo che è importante riuscire a dimostrare che un $T^{\mu\nu}$ simmetrico esiste.

Capitolo 3

Soluzioni delle equazioni di Maxwell

Passiamo ora allo studio dei metodi di risoluzione delle equazioni di Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

pensate come equazioni per A_μ .

3.1 Problema di Cauchy

Vogliamo risolvere il problema di Cauchy per le equazioni di Maxwell.

Notiamo preliminarmente che risolvere il problema alle condizioni iniziali è equivalente a determinare quanti (e quali) siano i gradi di libertà del campo elettromagnetico.

Esempio: Consideriamo una particella in una dimensione. La sua equazione dinamica sarà:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

che è un'equazione del second'ordine per $x(t)$: dunque la soluzione esiste ed è unica se sono note $x(0)$ e $\frac{dx}{dt}(0)$. Ciò è equivalente a dire che il sistema ha un grado di libertà (del second'ordine).

Possiamo dunque dire che un sistema ha n gradi di libertà (del second'ordine) se possiamo determinare univocamente una soluzione delle sue equazioni dinamiche con $2n$ condizioni iniziali. Sarà questa la nostra definizione di *gradi di libertà* di un sistema.

Proviamo a generalizzare il tutto ai campi, che in linea di principio avrebbero infiniti gradi di libertà. Diciamo che un campo ha n gradi di libertà se è necessario fissare $2n$ funzioni di \vec{x} per determinare univocamente una soluzione delle equazioni del moto dei campi. Queste $2n$ funzioni possiamo pensarle come i valori di $\varphi_r(0, \vec{x})$ e $\partial_0 \varphi_r(0, \vec{x})$.

Esempio: supponiamo di avere un campo $\varphi(t, \vec{x})$ che soddisfa:

$$\square \varphi = P(\varphi)$$

con $\square = \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_0)^2 - \nabla^2$ operatore d'alembertiano e P funzione generica di φ ma non delle sue derivate. Per determinare univocamente una soluzione di quest'equazione è necessario fissare $\varphi(0, \vec{x})$ e $\partial_0 \varphi(0, \vec{x})$. Dunque, detta $\varphi(t, \vec{x})$ una soluzione:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(t, \vec{x}) - \nabla^2 \varphi(t, \vec{x}) = P(\varphi(t, \vec{x})) \quad (3.1)$$

e sviluppandola in serie di Taylor attorno a $t = 0$:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \varphi(0, \vec{x}) + t \partial_0 \varphi(0, \vec{x}) + \frac{t^2}{2} \partial_0^2 \varphi(0, \vec{x}) + \frac{t^3}{3!} \partial_0^3 \varphi(0, \vec{x}) + \dots$$

Ora, $\varphi(0, \vec{x})$ e $\partial_0 \varphi(0, \vec{x})$ sono noti. Specificando la (3.1) a $t = 0$ si ha:

$$\partial_0^2 \varphi(0, \vec{x}) = \nabla^2 \varphi(0, \vec{x}) + P(\varphi(0, \vec{x}))$$

e dunque anche $\partial_0^2 \varphi(0, \vec{x})$ è noto. Pertanto, prendendo più volte ∂_0 ad ambo i membri di quest'ultima equazione, tutti i termini dell'espansione in serie di Taylor di φ sono noti.

In sostanza, quindi, noti $\varphi(0, \vec{x})$ e $\partial_0 \varphi(0, \vec{x})$ si può “ricostruire” tutta la soluzione $\varphi(t, \vec{x})$ a partire dall'equazione dinamica.

Questo risultato si può inoltre estendere anche a P qualunque, ossia funzione anche delle derivate di φ .

Vogliamo dunque capire quanti e quali gradi di libertà abbia il campo elettromagnetico. Le equazioni di Maxwell si possono riscrivere come:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = j^\nu \quad \Rightarrow \quad \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

Sembrerebbero quattro equazioni differenziali del tipo $\square A = f(A)$, e dunque potremmo pensare che il campo elettromagnetico abbia quattro gradi di libertà. In realtà, ciò non è vero per due motivi:

1. Non tutte le equazioni sono indipendenti. Scritte infatti nella forma:

$$G^\nu := \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu = 0$$

si ha:

$$\partial_\nu G^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\nu j^\nu = 0$$

e pertanto le equazioni non risultano linearmente indipendenti. In particolare, si può scrivere:

$$\partial_0 G^0 + \partial_i G^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 G^0 = -\partial_i G^i$$

Dunque, se $G^i(t, \vec{x}) = 0 \forall t, \vec{x}$ e $G^0(0, \vec{x}) = 0$, allora $\partial_0 G^0 = 0$, ossia $G^0(t, \vec{x}) = G^0(0, \vec{x}) \forall t, \vec{x}$; in altre parole, basta richiedere $G^0(t, \vec{x}) = 0$ solo per $t = 0$, perché G^0 non dipende dal tempo.

Quindi, ponendo $G^i(t, \vec{x}) = 0 \forall t, \vec{x}$ e $G^0(0, \vec{x}) = 0 \forall \vec{x}$ si ha $G^\nu = 0$, ossia le equazioni di Maxwell sono risolte. La prima è una vera e propria equazione dinamica, mentre la seconda non lo è: si tratta di un vincolo sui valori iniziali di $A_\mu(t, \vec{x})$. Si ha infatti:

$$G^0 = \partial_i F^{i0} - j^0 = -\nabla^2 A^0 - \partial_i \partial^0 A^i - j^0$$

che non coinvolge derivate seconde rispetto al tempo (e quindi non è un'equazione dinamica); ci basta dunque porre un vincolo su A^0 e $\partial_0 A^i$ per $t = 0$.

In realtà, dunque, non abbiamo quattro equazioni e quattro incognite, ma tre equazioni, un vincolo e quattro incognite.

2. L'invarianza di gauge. Il quadripotenziale è definito a meno di una trasformazione di gauge, e dunque esistono infinite soluzioni delle equazioni di Maxwell che sono fisicamente equivalenti. Per rimuovere questa “indeterminazione”, poniamo una *condizione di gauge fixing*, ossia scegliamo fra tutti i possibili quadripotenziali associati a un dato campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ un unico rappresentante. La scelta più conveniente in questo caso è la cosiddetta *gauge di Lorenz*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Mostriamo però che questa scelta della gauge è consistente, ossia mostriamo che a partire da un quadripotenziale arbitrario (dunque con $\partial_\mu A^\mu \neq 0$) è sempre possibile eseguire una trasformazione di gauge tale che il nuovo quadripotenziale A'^μ soddisfi la condizione di gauge-fixing, ossia $\partial_\mu A'^\mu = 0$. Supponiamo dunque di avere un $A^\mu(x)$ dato con $\partial_\mu A^\mu(x) \neq 0$; allora $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda$, e:

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \Lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \square \Lambda = -\partial_\mu A^\mu$$

ove il secondo membro è noto. Sappiamo dunque che una soluzione di questa equazione esiste ed è unica una volta specificati $\Lambda(0, \vec{x})$ e $\partial_0 \Lambda(0, \vec{x})$.

Sorge però un problema: la gauge di Lorenz non permette ancora di determinare univocamente il quadripotenziale. Infatti, se Λ soddisfa $\square \Lambda = -\partial_\mu A^\mu$ allora anche $\Lambda + \tilde{\Lambda}$ con $\square \tilde{\Lambda} = 0$ lo fa. La $\tilde{\Lambda}$ è detta *trasformazione di gauge residua*, e poiché come vedremo più avanti $\square \tilde{\Lambda} = 0$ ammette infinite soluzioni,

c'è una nuova “indeterminazione” in A_μ , in quanto sia A_μ che $A_\mu + \partial_\mu \tilde{\Lambda}$ individuano gli stessi campi, ed esistono infinite $\tilde{\Lambda}$ che soddisfano questa proprietà.

Dobbiamo dunque porre nuove condizioni per fissare anche la gauge residua, ed esistono infiniti modi equivalenti per farlo. Ad esempio, possiamo porre $A^3(0, \vec{x}) = \partial_0 A^3(0, \vec{x}) = 0$; mostriamo che è anche questa una scelta consistente: sia dunque A^μ un generico quadripotenziale (quindi in particolare con $A^3(0, \vec{x})$ e $\partial_0 A^3(0, \vec{x})$ non necessariamente nulli), e mostriamo che esiste un'unica trasformazione di gauge (ossia un'unica Λ) con la quale $A'^3(0, \vec{x}) = \partial_0 A'^3(0, \vec{x}) = 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} A'_3(0, \vec{x}) &= A_3(0, \vec{x}) + \partial_3 \Lambda(0, \vec{x}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \Lambda(0, \vec{x}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} A_3(0, \vec{x}) d\tilde{x}^3 + \text{cost.} \end{aligned}$$

e poiché (è sottinteso) vogliamo che le soluzioni (A^μ e Λ) tendano a zero all'infinito, il valore della costante è determinato, e pertanto anche $\Lambda(0, \vec{x})$.

Con la stessa logica, si può determinare $\partial_0 \Lambda$:

$$\partial_0 A'_3(0, \vec{x}) = \partial_0 A_3(0, \vec{x}) + \partial_3 \partial_0 \Lambda(0, \vec{x}) = 0$$

e integrando su x^3 si esplicita $\partial_0 \Lambda(0, \vec{x})$. Così, poiché abbiamo determinato $\Lambda(0, \vec{x})$ e $\partial_0 \Lambda(0, \vec{x})$, Λ è completamente determinato.

Ricapitolando, con la condizione di gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$, le equazioni di Maxwell diventano $\square A^\mu = j^\mu$. Per determinarne una soluzione dobbiamo:

1. Imporre $\square A^i = j^i \forall t, \vec{x}$
2. Imporre $\partial_\mu A^\mu = 0 \forall t, \vec{x}$
3. Imporre $G^0(0, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 A^0 + \partial_i \partial^0 A^i + j^0 = 0$ per $t = 0, \forall \vec{x}$
4. Imporre $A^3(0, \vec{x}) = \partial_0 A^3(0, \vec{x}) = 0$ per $t = 0, \forall \vec{x}$

Mostriamo che esiste dunque un'unica soluzione se sono determinati $A^a(0, \vec{x})$ e $\partial_0 A^a(0, \vec{x})$ con $a = 1, 2$.

Infatti, una volta specificate queste condizioni sono noti $A^i(0, \vec{x})$ e $\partial_0 A^i(0, \vec{x})$ (grazie anche al punto 4), e pertanto esiste un'unica soluzione della condizione 1, e pertanto sono determinati gli $A^i(t, \vec{x}) \forall t, \vec{x}$. Per la terza condizione, “invertendo” il laplaciano anche $A^0(0, \vec{x})$ è noto; sfruttando la condizione 2, $\partial_0 A^0 = -\partial_i A^i$, che è un'equazione del prim'ordine per A^0 della quale conosciamo la condizione iniziale. Pertanto, anche $A^0(t, \vec{x})$ è noto.

I gradi di libertà del campo elettromagnetico sono dunque due.

Ci proponiamo ora di costruire delle soluzioni esplicite delle equazioni di Maxwell.

3.2 Equazioni di Maxwell nel vuoto

3.2.1 Soluzioni dell'equazione di d'Alembert

$$\square A^\mu = 0 \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

Ognuna delle quattro equazioni $\square A^\mu = 0$ sono del tipo $\square \varphi = 0$, con φ campo scalare. Dobbiamo quindi risolvere:

$$\square \varphi = 0 \quad \varphi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

detta *equazione di d'Alembert*. Sappiamo che $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, e questo operatore è sostanzialmente l'estensione quadridimensionale del laplaciano $\nabla^2 = \delta_{ij} \partial^i \partial^j$. Supponiamo quindi di voler risolvere l'*equazione di Laplace*:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = 0 \quad \varphi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$$

L'unica soluzione di queste equazioni con queste condizioni, però, è $\varphi(\vec{x}) = 0$. Infatti, se vale l'equazione si avrà:

$$0 = \int \varphi(\vec{x}) \nabla^2 \varphi(\vec{x}) d^3 \vec{x} = - \int \partial_i \varphi(\vec{x}) \partial^i \varphi(\vec{x}) d^3 \vec{x} + \underbrace{\int_{\Sigma_\infty} \varphi(\vec{x}) \partial_i \varphi(\vec{x}) d\Sigma^i}_{=0} \Rightarrow \int \partial_i \varphi(\vec{x}) \partial^i \varphi(\vec{x}) d^3 \vec{x} = 0$$

Poiché l'integrando è una somma di quadrati, ciò significa che $\partial_i \varphi = 0 \forall i, \vec{x}$; pertanto φ è costante, e dovrà essere necessariamente nulla affinché venga soddisfatta la condizione $\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$.

Dunque, l'equazione di Laplace non ammette soluzioni che si annullano all'infinito che non siano banali.

Se però rieseguiamo lo stesso ragionamento per $\square \varphi = 0$, ciò non è più vero; risulta infatti:

$$\int \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi d^4 x = 0$$

e poiché η non è semidefinita positiva non si può concludere nulla (l'integrando non è più una somma di quadrati, o comunque non è in generale una quantità positiva).

Per risolvere l'equazione di d'Alembert (supponendo ovviamente φ scalare di Lorentz, e che sia una distribuzione), passiamo alle trasformate di Fourier:

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ikx} \varphi(x) d^4 x \quad \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ikx} \hat{\varphi}(k) d^4 k$$

Notiamo innanzitutto che se φ è scalare di Lorentz anche la sua trasformata di Fourier lo è; infatti:

$$\hat{\varphi}'(k') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ik'x'} \varphi'(x') d^4 x' = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ikx} \varphi(x) d^4 x = \hat{\varphi}(k)$$

perché $d^4 x' = d^4 x$ per le proprietà delle trasformazioni di Lorentz, e $kx = k_\mu x^\mu$ e φ sono scalari di Lorentz. Le trasformate di Fourier in questo caso sono estremamente utili perché:

$$\partial_\mu \varphi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ikx} (ik_\mu) \hat{\varphi}(k) d^4 k \Rightarrow \widehat{\partial_\mu \varphi} = ik_\mu \hat{\varphi}$$

Dunque:

$$\widehat{\square \varphi} = \widehat{\partial_\mu \partial^\mu \varphi} = (ik_\mu)(ik^\mu) \hat{\varphi}(k) = -k^\mu k_\mu \hat{\varphi}(k) \Rightarrow \widehat{\square \varphi} = 0 \Leftrightarrow k^\mu k_\mu \hat{\varphi}(k) = 0$$

Ora, l'insieme dei punti con $k^\mu k_\mu = 0$ è il cono luce dello spazio dei momenti k : ciò significa che $\hat{\varphi}(k)$ è non nulla solo su questo cono luce. Poiché $\hat{\varphi}(k)$ è scalare di Lorentz e le uniche sottovarietà invarianti del cono luce $k^\mu k_\mu = 0$ sono l'origine e il cono stesso privato dell'origine, esistono due sole scelte possibili:

1. $\hat{\varphi}(k) \neq 0$ solo se $k^\mu = 0$; si potrebbe dunque avere qualcosa del tipo¹:

$$\hat{\varphi}(k) = c \delta^{(4)}(k) + c^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \delta^{(4)}(k) + \dots \Rightarrow \varphi(x) = \frac{c}{(2\pi)^2} + \frac{(-ix_\mu)}{(2\pi)^2} c^\mu + \dots$$

Ma in questo caso φ non si annulla all'infinito. Pertanto, non considereremo queste soluzioni in quanto non fisicamente rilevanti

2. $\hat{\varphi}(k) \neq 0 \forall k^\mu | k^\mu k_\mu = 0$ con $k^\mu \neq 0$. In questo caso, invece, si avrà:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) &= \delta(k^\mu k_\mu) f(k) = \delta((k^0)^2 - |\vec{k}|^2) f(k) = \left[\frac{\delta(k^0 - |\vec{k}|)}{2|k^0|} + \frac{\delta(k^0 + |\vec{k}|)}{2|k^0|} \right] f(k^0, \vec{k}) = \\ &= \frac{1}{2|\vec{k}|} \left[\delta(k^0 - |\vec{k}|) f(|\vec{k}|, \vec{k}) + \delta(k^0 + |\vec{k}|) f(-|\vec{k}|, \vec{k}) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

¹ Ricordarsi che le distribuzioni a supporto in un punto possono essere soltanto combinazioni lineari di δ e delle sue derivate.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2|\vec{k}|} e^{ikx} \left[\delta(k^0 - |\vec{k}|) f(|\vec{k}|, \vec{k}) + \delta(k^0 + |\vec{k}|) f(-|\vec{k}|, \vec{k}) \right] d^3\vec{k} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2|\vec{k}|} \left[e^{i(|\vec{k}|x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} f(|\vec{k}|, \vec{k}) + e^{i(-|\vec{k}|x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} f(-|\vec{k}|, -\vec{k}) \right] d^3\vec{k} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2|\vec{k}|} \left[e^{ikx} f(|\vec{k}|, \vec{k}) + e^{-ikx} f(-|\vec{k}|, -\vec{k}) \right] d^3\vec{k}_{|k^0=|\vec{k}|}
\end{aligned}$$

ove nella penultima riga abbiamo effettuato il cambio di variabile $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ nel secondo addendo.

Affinché φ sia reale, per le proprietà delle trasformate di Fourier, si deve avere² $f(-|\vec{k}|, -\vec{k}) = f^*(|\vec{k}|, \vec{k})$, e per brevità poniamo $f(|\vec{k}|, \vec{k}) = \varepsilon(\vec{k})$.

In questo caso, dunque:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2|\vec{k}|} \left[\varepsilon(\vec{k}) e^{ikx} + \varepsilon^*(\vec{k}) e^{-ikx} \right] d^3\vec{k}_{|k^0=|\vec{k}|} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2|\vec{k}|} \left[\varepsilon(\vec{k}) e^{ikx} + c.c. \right] d^3\vec{k}_{|k^0=|\vec{k}|}$$

ove *c.c.* sta per “complesso coniugato”.

Notiamo che, poiché φ è sicuramente scalare di Lorentz, dalla sua espressione segue che anche $d^3\vec{k}/|\vec{k}|$ è invariante di Lorentz, fatto assolutamente non ovvio a priori.

Ora, sappiamo già che φ ha un grado di libertà, cioè deve dipendere da due funzioni indipendenti; essendo però ε complessa, questa sarà esprimibile come una opportuna somma di due funzioni reali: ci deve dunque essere una relazione univoca che lega $\varphi(0, \vec{x})$ e $\partial_0 \varphi(0, \vec{x})$ con $\varepsilon(\vec{k})$.

La soluzione più generale possibile di $\square \varphi = 0$, dunque, è:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2|\vec{k}|} \left[\varepsilon(\vec{k}) e^{ikx} + c.c. \right] d^3\vec{k}_{|k^0=|\vec{k}|}$$

Questa può essere vista come una sovrapposizione di soluzioni elementari $\varphi_k = \varepsilon(\vec{k}) e^{ikx} + c.c._{|k^0=|\vec{k}|}$, dette *onde piane*; se ad esempio $\vec{k} = \vec{z}|\vec{k}|$, allora:

$$\varphi_k(x) = \varepsilon(\vec{k}) e^{i|\vec{k}|(t - |\vec{z}|)} + c.c._{|k^0=|\vec{k}|}$$

e i punti con fase costante, cioè i punti tali che $|\vec{k}|(t - |\vec{z}|) = \text{cost.}$ rappresentano dei piani ortogonali a \vec{z} , detti *fronti d'onda*, che si propagano alla velocità della luce. Queste onde sono anche *monocromatiche*, perché posseggono una frequenza ben precisa ($f = |\vec{k}|/2\pi = 1/\lambda$); c'è da dire però che una singola onda piana non si annulla all'infinito, e pertanto considereremo, come soluzioni generali dell'equazione $\square \varphi = 0$, sovrapposizioni di onde piane, dette *pacchetti d'onde*.

3.2.2 Soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto: le onde elettromagnetiche

Alla luce di ciò, consideriamo le equazioni di Maxwell:

$$\square A^\mu = 0$$

Si tratta di quattro equazioni identiche a quelle che abbiamo appena visto, una per ogni componente di A^μ . In modo analogo si determina che:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2|\vec{k}|} \left[\varepsilon^\mu(\vec{k}) e^{ikx} + c.c. \right]_{|k^0=|\vec{k}|} d^3\vec{k}$$

²Infatti, dalla definizione stessa di trasformata di Fourier si verifica che se φ è reale allora $\hat{\varphi}^*(k) = \hat{\varphi}(-k)$. La condizione $f(-|\vec{k}|, -\vec{k}) = f^*(|\vec{k}|, \vec{k})$ deriva dunque dal fatto che f è la trasformata di Fourier della φ , che è reale (lo avevamo implicitamente supposto).

ove stavolta ε^μ è un quadrivettore (detto *vettore di polarizzazione*), e quindi cambierà sotto trasformazioni di Lorentz come $\varepsilon'^\mu(\vec{k}') = \Lambda^\mu_\nu \varepsilon^\nu(\vec{k})$.

In questo caso, dunque, sembrerebbe che il campo elettromagnetico abbia quattro gradi di libertà (uno per ogni componente di A^μ , ossia uno per ogni funzione complessa che costituisce $\varepsilon^\mu(\vec{k})$); dobbiamo però imporre la gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, ossia $k_\mu \varepsilon^\mu(\vec{k}) = 0$, e pertanto ε^μ ha solo tre componenti indipendenti. Tuttavia, come abbiamo già visto porre $\partial_\mu A^\mu = 0$ non fissa completamente la gauge, perché possiamo ancora eseguire trasformazioni di gauge residue del tipo $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ con $\square \Lambda = 0$. La generica soluzione di $\square \Lambda = 0$, però, è³:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{2i|\vec{k}|} \left[e^{ikx} \lambda(\vec{k}) - c.c. \right] d^3\vec{k}_{|k^0|=|\vec{k}|}$$

e quindi sotto la trasformazione $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, il quadrivettore ε^μ diventa:

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}) \rightarrow \varepsilon^\mu(\vec{k}) + k^\mu \lambda(\vec{k}) := \tilde{\varepsilon}^\mu(\vec{k})$$

Inoltre:

$$k_\mu \tilde{\varepsilon}^\mu(\vec{k}) = k_\mu \varepsilon^\mu(\vec{k}) + k_\mu k^\mu \lambda(\vec{k}) = 0$$

perché ambo gli addendi sono nulli. Pertanto neanche tutte le componenti di $\tilde{\varepsilon}^\mu(\vec{k})$ (e quindi neanche quelle di $\varepsilon^\mu(k)$) sono linearmente indipendenti; risulta quindi che delle quattro componenti di $\varepsilon^\mu(\vec{k})$ solo due sono linearmente indipendenti, in quanto una viene eliminata dalla gauge di Lorenz, e l'altra dalla gauge residua. Pertanto, A^μ e quindi $F^{\mu\nu}$ ha due gradi di libertà, come già avevamo visto.

Introduciamo ora delle notazioni che ci saranno utili in seguito. Dato k^μ con $k_\mu k^\mu = 0$, poniamo:

$$n^\mu = \frac{k^\mu}{|\vec{k}|} \Rightarrow n^\mu n_\mu = 0 \quad n^0 = 1 \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad |\vec{n}| = 1$$

che altro non è che il versore che indica la direzione di propagazione dell'onda. Vale poi (sottintendiamo il pedice \vec{k}):

$$\partial_\mu A^\nu = ik_\mu \varepsilon^\nu e^{ikx} + c.c.$$

Allora, in particolare:

$$\partial_0 A^\nu := \dot{A}^\nu = i|\vec{k}| \varepsilon^\nu e^{ikx} + c.c.$$

Confrontando queste ultime due equazioni, risulta:

$$\partial_\mu A^\nu = n_\mu \dot{A}^\nu \tag{3.2}$$

e vale anche:

$$n_\mu \dot{A}^\mu = 0 \quad n_\mu n^\mu = 0 \tag{3.3}$$

Le (3.2) e (3.3) si chiamano *relazioni delle onde*, e valgono per ogni onda elementare.

3.2.3 Espressione esplicita dei campi in un'onda elettromagnetica

Calcoliamo dunque l'espressione di \vec{E} e \vec{B} per un'onda elettromagnetica elementare. Innanzitutto:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = n^\mu \dot{A}^\nu - n^\nu \dot{A}^\mu$$

Dunque per il campo elettrico si avrà:

$$E^i = F^{i0} = n^i \dot{A}^0 - n^0 \dot{A}^i = n^i n^j \dot{A}^j - \dot{A}^i = \underbrace{(n^i n^j - \delta^{ij})}_{:=P^{ij}} \dot{A}^j$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{A}) - \vec{A} = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A})$$

³Rispetto a quanto visto prima, ridefiniamo la λ in modo che compaia la i a denominatore, di modo che poi si semplifichi e non appesantisca inutilmente la notazione.

ove P^{ij} è il proiettore sul sottospazio ortogonale a n^i ; infatti $P^{ij}n^j = n^i n^j n^j - n^i = n^i - n^i = 0$.

Per quanto riguarda il campo magnetico, invece:

$$B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F^{jk} = -\epsilon^{ijk}n^j\dot{A}^k \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\vec{n} \times \vec{\dot{A}}$$

Notiamo dunque che:

1. Una trasformazione di gauge non cambia i campi elettrico e magnetico (perché non cambia $F^{\mu\nu}$)
2. Le componenti di $\vec{\dot{A}}$ lungo \vec{n} non contribuiscono al valore di B^i ; infatti se $\dot{A}^k \propto n^k$ allora $B^i \propto -\epsilon^{ijk}n^j n^k = 0$

Inoltre, i vettori \vec{E} e \vec{B} risultano ortogonali alla direzione di propagazione \vec{n} :

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = n^i(n^i n^j - \delta^{ij})\dot{A}^j = n^i \dot{A}^j - n^j \dot{A}^j = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = -n^i \epsilon^{ijk}n^j \dot{A}^k = 0$$

Dunque $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{n}$. Risulta inoltre:

$$(\vec{n} \times \vec{E})^i = \epsilon^{ijk}n^j E^k = \epsilon^{ijk}n^j (n^k n^\ell - \delta^{k\ell})\dot{A}^\ell = -\epsilon^{ijk}n^j \dot{A}^k = B^i$$

ossia $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$: i campi, oltre a essere ortogonali alla direzione di propagazione, sono ortogonali fra di loro. Infine, poiché $|\vec{n}| = 1$ risulta⁴ $|\vec{B}| = |\vec{E}|$.

Impulso di un'onda elettromagnetica

Cerchiamo ora di determinare le quantità conservate associate ad un'onda elettromagnetica.

Queste saranno necessariamente associate al tensore energia-impulso e densità di momento angolare dell'onda.

Considerando dunque il primo:

$$T_{\text{emg}}^{\mu\nu} = F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

ma $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0$ perché $|\vec{B}| = |\vec{E}|$. Dunque:

$$\begin{aligned} T_{\text{emg}}^{\mu\nu} &= F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} = (n^\mu \dot{A}_\alpha - n_\alpha \dot{A}^\mu) (n^\alpha \dot{A}^\nu - n^\nu \dot{A}^\alpha) = -n^\mu n^\nu \dot{A}_\alpha \dot{A}^\alpha = n^\mu n^\nu (\dot{A}^i \dot{A}^i - \dot{A}^0 \dot{A}^0) = \\ &= n^\mu n^\nu (\dot{A}^i \dot{A}^i - n^i \dot{A}^i n^j \dot{A}^j) = n^\mu n^\nu \dot{A}^i \dot{A}^j (\delta^{ij} - n^i n^j) = n^\mu n^\nu \left(|\vec{\dot{A}}|^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\dot{A}})^2 \right) \end{aligned}$$

Possiamo sempre scegliere gli assi di modo che $\vec{n} = (0, 0, 1)$; in questo modo:

$$\begin{aligned} T_{\text{emg}}^{\mu\nu} &= n^\mu n^\nu \left[(\dot{A}^1)^2 + (\dot{A}^2)^2 \right] \quad \vec{E} = (-\dot{A}^1, -\dot{A}^2, 0) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{\text{emg}}^{\mu\nu} &= n^\mu n^\nu |\vec{E}|^2 = n^\mu n^\nu \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{2} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{emg}}^{\mu\nu} = n^\mu n^\nu W \end{aligned}$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che $|\vec{E}| = |\vec{B}|$, e con $W = T_{\text{emg}}^{00}$ abbiamo indicato la densità di energia del campo elettromagnetico.

Si avrà dunque che il quadrimomento trasportato dall'onda è:

$$P^\mu = \int T_{\text{emg}}^{0\mu} d^3\vec{x} = \int n^\mu W d^3\vec{x} = n^\mu \mathcal{E}$$

con \mathcal{E} energia totale dell'onda (ovviamente per un'onda piana si avrebbe $\mathcal{E} = +\infty$, ma abbiamo già detto che le uniche soluzioni fisicamente sensate delle equazioni di Maxwell sono pacchetti d'onde). Poiché dunque $n_\mu n^\mu = 0$, si avrà $P^\mu P_\mu = 0$; è per questo che, nella quantizzazione dell'elettrodinamica, si possono associare ai campi particelle (i fotoni) prive di massa.

⁴Nota: $\vec{B} \cdot \vec{E}$ e $|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2$ sono proporzionali agli invarianti che si possono costruire con $F_{\mu\nu}$. In particolare, poiché $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2$, per un campo elettromagnetico libero si ha $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0$.

Momento angolare di un'onda elettromagnetica

L'altra quantità che resterebbe da studiare è il momento angolare:

$$M^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T_{\text{emg}}^{\mu\lambda} - x^\lambda T_{\text{emg}}^{\mu\nu} \quad L^{\nu\lambda} = \int M^{0\nu\lambda} d^3\vec{x} = \int (x^\nu n^\lambda - x^\lambda n^\nu) W d^3\vec{x}$$

$$L^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} L^{jk} = \int \epsilon^{ijk} x^j n^k W d^3\vec{x}$$

e se ad esempio $\vec{n} = (0, 0, 1)$:

$$L^3 = \int \epsilon^{3j3} x^j W d^3\vec{x} = 0$$

Sembrerebbe dunque che le onde non trasportino momento angolare nella loro direzione di propagazione. Anche con le altre componenti si ottiene lo stesso risultato:

$$L^1 = \int \epsilon^{1j3} x^j W d^3\vec{x} = \int \epsilon^{123} x^2 W d^3\vec{x} = W(z) \int x^2 d^3\vec{x} = 0$$

ove la penultima uguaglianza è dovuta al fatto che in un'onda che si propaga lungo z le sue grandezze (in questo caso W) dipendono solo da z , e analogamente si trova $L^2 = 0$.

Ciò però è falso: le onde elettromagnetiche possono essere polarizzate, e quelle polarizzate circolarmente trasportano momento angolare.

Questo problema sorge perché abbiamo fatto il conto *non* sul tensore che deriva direttamente dal teorema di Noether, ma su quello simmetrico. Abbiamo visto che nella determinazione del tensore energia-impulso simmetrico è fondamentale l'ipotesi che i campi si annullino all'infinito, cosa che le onde piane come già evidenziato non fanno.

In realtà, si può vedere che le onde elettromagnetiche trasportano momento angolare lungo la loro direzione di propagazione anche con ragionamenti indiretti, che ora seguiremo.

Stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica

Cominciamo definendo lo stato di polarizzazione di un'onda, che sarà legato alle proprietà del quadrivettore ϵ^μ . Ricordando che nella gauge di Lorenz si ha $k_\mu \epsilon^\mu(\vec{k}) = 0$, e supponendo che l'onda si propaghi lungo z , allora $k^\mu = |\vec{k}|(1, 0, 0, 1)$ (in questo modo $k_\mu k^\mu = 0$) e dunque:

$$\epsilon^\mu = (\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3) \rightsquigarrow k_\mu \epsilon^\mu = |\vec{k}|(\epsilon^0 - \epsilon^3) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon^0 = \epsilon^3$$

e quindi:

$$\epsilon^\mu = (\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^0) = \underbrace{\frac{\epsilon^0}{|\vec{k}|} k^\mu}_{:= \epsilon_L^\mu} + \underbrace{(0, \epsilon^1, \epsilon^2, 0)}_{:= \epsilon_T^\mu}$$

ove ϵ_L^μ è la *parte longitudinale* (ossia diretta come k^μ) e ϵ_T^μ quella *trasversa* del vettore di polarizzazione ϵ^μ . Di queste due, l'unica fisicamente rilevante è quella trasversa, perché quella longitudinale può essere eliminata con un'opportuna trasformazione di gauge:

$$\epsilon^\mu \sim \epsilon^\mu + \lambda(\vec{k}) k^\mu \quad \lambda(\vec{k}) := -\frac{\epsilon^0(\vec{k})}{|\vec{k}|} \quad \Rightarrow \quad \epsilon^\mu \sim \epsilon_T^\mu$$

Sono dunque solo ϵ^1 e ϵ^2 che determinano lo stato di polarizzazione dell'onda. Vediamo dunque quali possono essere i possibili stati di polarizzazione per un'onda elettromagnetica. Inserendo l'espressione del quaripotenziiale di un'onda elementare:

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu(\vec{k}) e^{ikx} + c.c. \cdot |_{k^0=|\vec{k}|}$$

in $\vec{E} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{A}) - \vec{A}$, si ha:

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} e^{ikx} + c.c.$$

con $\vec{\mathcal{E}}$ vettore complesso tale che $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{n} = 0$, dunque $\vec{\mathcal{E}} \propto \vec{e}_T$. Scegliamo dunque due versori \vec{e}_1 e \vec{e}_2 ortogonali a \vec{n} e fra di loro. In questo modo ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{C}$, e l'1/2 compare per convenienza):

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_1 \vec{e}_1 + \mathcal{E}_2 \vec{e}_2) = \frac{1}{2} e^{i\tilde{\delta}} \left(|\mathcal{E}_1| \vec{e}_1 + e^{i\delta} |\mathcal{E}_2| \vec{e}_2 \right)$$

con $\tilde{\delta}$ fase di \mathcal{E}_1 e δ differenza di fase fra \mathcal{E}_2 e \mathcal{E}_1 . Tuttavia $\tilde{\delta}$ è irrilevante, perché:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} e^{i\tilde{\delta}} e^{ikx} \left(|\mathcal{E}_1| \vec{e}_1 + e^{i\delta} |\mathcal{E}_2| \vec{e}_2 \right) + c.c.$$

e dunque ridefinendo l'origine dei tempi ($x^0 \rightarrow x^0 - \tilde{\delta}/k^0$) si può porre $\tilde{\delta} = 0$. Dunque:

$$\vec{E} = |\mathcal{E}_1| \cos(kx) \vec{e}_1 + |\mathcal{E}_2| \cos(kx + \delta) \vec{e}_2$$

I casi possibili sono quindi:

$\delta = 0$: allora:

$$\vec{E} = (|\mathcal{E}_1| \vec{e}_1 + |\mathcal{E}_2| \vec{e}_2) \cos(kx)$$

e dunque in ogni istante \vec{E} oscilla lungo la stessa direzione: il campo si dice *polarizzato linearmente*

$\delta = \pm\pi/2$, $|\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2|$: in questo caso:

$$\vec{E} = |\mathcal{E}_1| (\cos(kx) \vec{e}_1 \mp \sin(kx) \vec{e}_2)$$

e dunque al variare di x , \vec{E} descrive un cerchio, in senso orario o antiorario a seconda se $\delta = +\pi/2$ o $\delta = -\pi/2$: il campo si dice *polarizzato circolarmente* (*destro* o *sinistro*).

Nel caso in cui un'onda sia polarizzata circolarmente, allora:

$$\epsilon_T^\mu \propto (0, 1, \pm i, 0)$$

Ciò che vogliamo dunque mostrare è che un'onda polarizzata circolarmente trasporta momento angolare nella direzione di propagazione (si dice anche che *porta elicità*), e che può assumere valori $+1$ o -1 . Mostriamolo in un contesto più generale, ossia considerando anche il caso delle onde gravitazionali.

Onde gravitazionali

Il campo gravitazionale (nel limite in cui questo sia debole) è descritto dal tensore simmetrico $H_{\mu\nu}(x)$ (così come il campo elettromagnetico è descritto da $A_\mu(x)$). Fisicamente, $H_{\mu\nu}$ rappresenta le piccole deformazioni della metrica dello spaziotempo rispetto alla metrica di Minkowski dovute alla gravità. Se c'è campo gravitazionale, infatti, la metrica dello spaziotempo è:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

con $g_{\mu\nu}$ funzione di x e simmetrico in μ e ν . Quando il campo gravitazionale è molto debole (ossia a grandi distanze dalle sorgenti):

$$g_{\mu\nu}(x) \approx \eta_{\mu\nu} + \left(H_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} H^\rho{}_\rho(x) \right) + O(H^2)$$

In analogia con le onde elettromagnetiche, le equazioni differenziali a cui H dovrà obbedire saranno:

$$\square H_{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$$

Se fossimo in presenza di sorgenti, si dovrebbe avere $\square H_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$ con $T_{\mu\nu}$ tensore energia-impulso (altro motivo in più perché $T_{\mu\nu}$ dev'essere simmetrico). Inoltre, $H_{\mu\nu}$ è legato al potenziale gravitazionale classico φ da:

$$\varphi = \frac{1}{4} H_{00}$$

e ciò accade perché nel caso newtoniano $v \ll 1$, e risulta $T_{00} \gg T_{ij}$ (infatti $T_{\mu\nu}^P \propto \frac{p^\mu p^\nu}{\mathcal{E}} \mathcal{D}^{(3)} \Rightarrow T_{00}^P \propto m$, $T_{0i}^P \propto p^i \propto mv^i$).

Per semplice analogia con l'elettromagnetismo possiamo scrivere le equazioni differenziali che descrivono il campo gravitazionale:

$$\square H_{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$$

ove la seconda equazione fissa univocamente la gauge del campo, come vedremo fra poco.

Sappiamo dunque che se il campo gravitazionale è debole:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} H^\rho{}_\rho + O(H^2)$$

In relatività speciale il gruppo di simmetria “naturale” è l'insieme delle trasformazioni di coordinate che lasciano invariata la metrica, ossia il gruppo di Poincaré; in relatività generale, invece, questo gruppo è molto più ampio: si possono considerare trasformazioni qualsiasi delle coordinate $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$, detti *diffeomorfismi*. Se dunque in relatività speciale le trasformazioni erano definite complessivamente da 10 parametri, adesso ci sono infiniti gradi di libertà, e possiamo intendere questo fatto come una sorta di invarianza di gauge. Abbiamo, insomma, che le \tilde{x}^μ sono le trasformazioni di gauge della relatività generale (non vediamo come agiscono sui campi perché è troppo complicato). Affinché in relatività generale il ds^2 sia invariante sarà dunque necessario che anche $g_{\mu\nu}(x)$ trasformi in modo ben preciso (che non ricaveremo) sotto \tilde{x}^μ . L'equazione $\partial_\mu H^{\mu\nu}$ è quindi proprio la condizione che poniamo per fissare questa gauge.

Dobbiamo anche tenere in conto che, come già detto, le equazioni che abbiamo scritto non sono le equazioni esatte del campo gravitazionale, ma una loro approssimazione per campi deboli: l'elettromagnetismo è infatti lineare, mentre la gravità no (nell'espressione di $H_{\mu\nu}$ compaiono infatti termini $O(H^2)$). L'origine fisica di questa differenza fra campo elettromagnetico e gravitazionale risiede nel fatto che il campo elettromagnetico non è “carico”, mentre quello gravitazionale lo è. Spieghiamo meglio cosa intendiamo con quest'ultima affermazione: il campo elettromagnetico è generato da cariche, ma non trasporta carica elettrica, nel senso che fra le varie quantità che si possono associare a questo tipo di campo (quantità di moto, momento angolare ecc.) la carica elettrica non compare; da un punto di vista quantistico, ciò significa che i mediatori di questo campo, i fotoni, non hanno carica. Il campo gravitazionale, invece, è generato da massa, che è equivalente all'energia, e il campo gravitazionale (come tutti i campi in una teoria relativistica, grazie al teorema di Noether) trasporta esso stesso energia: $H_{\mu\nu}$, dunque, influisce su sé stesso modificando la struttura stessa del campo, che non risulta più lineare.

Considerando l'equazione $\square H_{\mu\nu} = 0$, sappiamo dunque che $H_{\mu\nu}$ è sovrapposizione di onde elementari (ossia piane monocromatiche):

$$H_{\mu\nu}(x) = \varepsilon_{\mu\nu}(\vec{k}) e^{ikx} + c.c. |_{k^\mu k_\mu = 0}$$

ove $\varepsilon_{\mu\nu}$ è detto *tensore di polarizzazione*. Ponendo $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$, dunque, risulta $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu}(\vec{k}) = 0$. Anche in questo caso, inoltre, dobbiamo considerare le possibili trasformazioni di gauge residue:

$$\varepsilon_{\mu\nu}(\vec{k}) \longrightarrow \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}(\vec{k}) = \varepsilon_{\mu\nu}(\vec{k}) + \underbrace{k_\mu \lambda_\nu(\vec{k}) + k_\nu \lambda_\mu(\vec{k}) - \eta_{\mu\nu} \lambda_\rho k^\rho}_{:=A}$$

ove A è stato inserito affinché $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}$ sia simmetrico (infatti $\varepsilon_{\mu\nu}$ lo è perché tale è $H_{\mu\nu}$), e l'ultimo addendo serve affinché $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}$ soddisfi ancora la condizione di gauge:

$$k^\mu \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}(\vec{k}) = k^\mu \varepsilon_{\mu\nu}(\vec{k}) + k^\mu k_\mu \lambda_\nu(\vec{k}) + k_\nu k^\mu \lambda_\mu(\vec{k}) - k^\mu \eta_{\mu\nu} \lambda_\rho(\vec{k}) k^\rho = k_\nu k^\mu \lambda_\mu(\vec{k}) - k_\nu \lambda_\rho(\vec{k}) k^\rho = 0$$

Ci chiediamo dunque: un campo del genere quanti gradi di libertà ha?

Sono le componenti di $\varepsilon_{\mu\nu}$, che sono 10 funzioni complesse (poiché è simmetrico) delle tre variabili \vec{k} . Si deve poi avere $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$, che sono quattro vincoli (uno per ogni valore di ν); pertanto $\varepsilon_{\mu\nu}$ è composto da $10-4=6$ funzioni complesse indipendenti. Poiché inoltre ci sono quattro trasformazioni di gauge residue (corrispondenti

alle quattro funzioni λ_μ , rimangono $6-4=2$ funzioni complesse indipendenti che compongono $\varepsilon_{\mu\nu}$, ossia $H_{\mu\nu}$ ha due gradi di libertà, proprio come il campo elettromagnetico.

Scegliamo dunque gli assi di modo che $k^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$, ove $\omega = |\vec{k}|$. In questo modo da $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$ segue che $\varepsilon^{0\nu} = \varepsilon^{3\nu} \forall \nu$. Pertanto, le componenti indipendenti di $\varepsilon_{\mu\nu}$ sono tutte quelle dove non compare l'indice 3; vediamo quali di queste possono essere eliminate per l'invarianza di gauge.

Poniamo $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \delta\varepsilon_{\mu\nu}$; allora:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^{00} &= \omega(\lambda^0 + \lambda^3) & \delta\varepsilon^{01} &= \omega\lambda^1 & \delta\varepsilon^{02} &= \omega\lambda^2 \\ \delta\varepsilon^{11} &= \omega(\lambda^0 - \lambda^3) & \delta\varepsilon^{12} &= 0 & \delta\varepsilon^{22} &= \omega(\lambda^0 - \lambda^3) \end{aligned}$$

Scegliendo opportunamente λ_1 e λ_2 , quindi, si può sempre porre⁵ $\varepsilon^{01} = \varepsilon^{02} = 0$; analogamente, scegliendo opportunamente λ^0 e λ^3 , si può porre $\varepsilon^{00} = 0$ e $\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} = 0$. In generale, invece, $\varepsilon^{12} \neq 0$.

I gradi di libertà che abbiamo a disposizione sono dunque ε^{12} e ε^{11} (fissato quest'ultimo, anche ε^{22} è automaticamente fissato dalla relazione appena vista). Pertanto:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{12} & -\varepsilon^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elicità

Mostriamo ora che, in generale, i campi elettromagnetico e gravitazionale trasportano momento angolare, detto *elicità*.

Consideriamo dunque tre tipi di campo: scalare, quadrivettoriale e quadritensoriale. Ad ognuno di essi sarà associato, rispettivamente, un campo scalare $\varepsilon(\vec{k})$, uno quadrivettoriale $\varepsilon_\mu(\vec{k})$ e uno quadritensoriale $\varepsilon_{\mu\nu}(\vec{k})$. Sotto trasformazioni di Lorentz si avrà:

$$\begin{aligned} k'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu k^\nu & \varepsilon'(k') &= \varepsilon(k) \\ \varepsilon'^\mu(k') &= \Lambda^\mu_\nu \varepsilon^\nu(k) & \varepsilon'^{\mu\nu}(k') &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma}(k) \end{aligned}$$

e queste trasformazioni agiscono su uno spazio vettoriale di dimensione infinita (ε è infatti una funzione di k). Consideriamo ora il sottogruppo del gruppo di Lorentz, spesso detto *piccolo gruppo*, formato dalle matrici Λ tali che:

$$k'^\mu = k^\mu \quad \Lambda^\mu_\nu k^\nu = k^\mu$$

ove k^μ è un quadrivettore fissato. Se dunque Λ appartiene al piccolo gruppo, le leggi di trasformazione dei tensori di polarizzazione saranno:

$$\varepsilon'(k) = \varepsilon(k) \quad \varepsilon'^\mu(k) = \Lambda^\mu_\nu \varepsilon^\nu(k) \quad \varepsilon'^{\mu\nu}(k) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma}(k)$$

pertanto, ε forma una rappresentazione finito-dimensionale del piccolo gruppo, o in altre parole le coordinate dei tensori di polarizzazione trasformano linearmente fra loro.

Si può dimostrare che, note le trasformazioni del piccolo gruppo, si possono ricostruire tutte le trasformazioni possibili. Studiamo dunque com'è fatto il piccolo gruppo in casi particolari. Ne distinguiamo due:

$k^2 = m^2 \neq 0$: in questo caso esiste sempre un sistema di riferimento nel quale si ha:

$$k^\mu = m(1, 0, 0, 0)$$

Dunque, le trasformazioni di Lorentz che agendo su k^μ non lo cambiano (in altre parole, le trasformazioni del piccolo gruppo) dovranno essere tali che:

$$k' = k \Leftrightarrow \Lambda^0_i = 0 \text{ per } i \neq 0, \Lambda^i_0 = 0 \text{ per } i \neq 0$$

⁵Attenzione: dovremmo scrivere in realtà, ad esempio, $\varepsilon'^{01} = 0$; tuttavia, poiché ε^{01} e ε'^{01} sono collegati da una trasformazione di gauge, sono fisicamente equivalenti, e dunque si può porre direttamente $\varepsilon^{01} = 0$.

Dunque:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

con R matrice di rotazione tridimensionale.

$k^2 = 0$: possiamo allora scegliere gli assi di modo che $k^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$. Pertanto:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti, in questo modo, la rotazione coinvolge solo le componenti 1 e 2 di k , che sono nulle, e pertanto k non viene alterato.

In realtà esisterebbero altri due tipi di trasformazione che appartengono al piccolo gruppo, ma le ignoriamo in quanto non hanno significato fisico.

Vogliamo dunque capire come trasformi ε sotto il piccolo gruppo. Se infatti ε^μ è ad esempio un vettore di polarizzazione che sotto queste trasformazioni cambia nel seguente modo:

$$\varepsilon^\mu(k) \xrightarrow{\Lambda} \varepsilon^\mu(k) e^{in\varphi}$$

si dice che il campo ha *elicità* n , che è la componente lungo z del momento angolare trasportato dall'onda⁶. Calcoliamo dunque quanto vale l'elicità per i vari tipi di campo che stiamo considerando:

campo scalare: Si ha:

$$\varepsilon(k) \longrightarrow \varepsilon(k) \quad \Rightarrow \quad n = 0$$

Pertanto, i campi scalari non hanno elicità, ossia non trasportano momento angolare.

campo elettromagnetico: Sappiamo che possiamo scrivere:

$$\varepsilon^\mu = \underbrace{\varepsilon^0(1, 0, 0, 1)}_{\varepsilon_L^\mu} + \underbrace{(0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, 0)}_{\varepsilon_T^\mu}$$

Dunque:

$$\varepsilon^0 \longrightarrow \varepsilon'^0 = \varepsilon^0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'^\mu_L = \varepsilon^\mu_L \quad \Rightarrow \quad n = 0$$

che effettivamente è un risultato inutile in quanto ε^0 non ha significato fisico. Inoltre:

$$\varepsilon'^1 = \cos \varphi \varepsilon^1 + \sin \varphi \varepsilon^2 \quad \varepsilon'^2 = -\sin \varphi \varepsilon^1 + \cos \varphi \varepsilon^2$$

Cerchiamo dunque una base di autovettori che diagonalizzi questa trasformazione. Si determina che questa base è:

$$\varepsilon_T^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$\varepsilon'^{(\pm)}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\pm i\varphi} \\ \pm i e^{\pm i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\pm i\varphi} \varepsilon_T^{(\pm)}$$

⁶In realtà ciò non è evidente e infatti non lo si può vedere a questo livello della trattazione, perché è collegato con l'elettrodinamica quantistica. In breve, si può mostrare che se un campo ha elicità n allora i suoi mediatori (i fotoni nel caso dell'elettromagnetismo, ad esempio) hanno spin n .

Pertanto $n = \pm 1$: il campo elettromagnetico ha elicità ± 1 . Notiamo anche che $\varepsilon_T^{(\pm)}$ corrispondono ai vettori di polarizzazione di un'onda polarizzata circolarmente.

Possiamo dunque concludere che il campo elettromagnetico, se polarizzato circolarmente, trasporta momento angolare.

campo gravitazionale: Abbiamo visto che come componenti fisiche di $\varepsilon^{\mu\nu}$ possiamo usare ε^{11} e ε^{12} . Dunque:

$$\begin{aligned}\varepsilon'^{11} &= \cos^2 \varphi \varepsilon^{11} + 2 \cos \varphi \sin \varphi \varepsilon^{12} + \sin^2 \varphi \underbrace{\varepsilon^{22}}_{=-\varepsilon^{11}} = \\ &= (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \varepsilon^{11} + 2 \cos \varphi \sin \varphi \varepsilon^{12} = \cos(2\varphi) \varepsilon^{11} + \sin(2\varphi) \varepsilon^{12}\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\varepsilon'^{12} = \cos(2\varphi) \varepsilon^{12} - \sin(2\varphi) \varepsilon^{11}$$

Gli autovettori della trasformazione sono gli stessi di prima, perciò:

$$\varepsilon_T'^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\pm i2\varphi} \\ \pm i e^{\pm i2\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\pm i2\varphi} \varepsilon_T^{(\pm)} \Rightarrow n = \pm 2$$

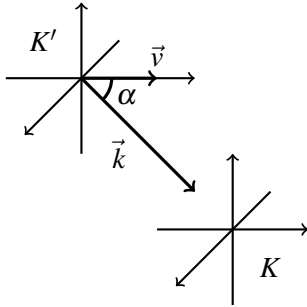
Il campo gravitazionale ha dunque elicità ± 2 .

3.2.4 Effetto Doppler relativistico

Studiamo ora come vari la frequenza di un'onda elettromagnetica nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro.

Nello studio dell'effetto Doppler non relativistico in genere si considerano tre sistemi di riferimento: quello della sorgente, quello del mezzo e quello dell'osservatore; le velocità rilevanti, poi, sono due: quella delle onde rispetto al mezzo e quella dell'osservatore rispetto al mezzo.

Nel caso relativistico esistono invece due soli sistemi di riferimento: quello della sorgente e quello dell'osservatore; l'unica velocità rilevante, poi, è quella relativa fra sorgente e osservatore.



Consideriamo dunque una sorgente nel suo sistema di riferimento di riposo K' che emette un'onda elettromagnetica elementare con vettore d'onda \vec{k}_0 . In un altro sistema di riferimento K , rispetto al quale K' si muove con velocità costante \vec{v} , un osservatore misura l'onda emessa dalla sorgente, o meglio misura il suo vettore d'onda \vec{k}' . Supponiamo ovviamente che i due sistemi di riferimento siano orientati nello stesso modo, e non è restrittivo supporre $\vec{v} \parallel \hat{x}$.

In K si avrà dunque un campo elettromagnetico descritto da:

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(\vec{k}) e^{ikx} + c.c.$$

con $k^\mu = (\omega, \vec{k})$ e $\omega = |\vec{k}|$.

In K' , invece:

$$A'_\mu(x') = \varepsilon'_\mu(\vec{k}') e^{ik'x'} + c.c.$$

con $k'^\mu = (\omega_0, \vec{k}_0)$, e $\omega_0 = |\vec{k}_0|$ è detta *frequenza di riposo*.

Ora:

$$k'^\mu = \Lambda^\mu_\nu k^\nu \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo dunque la componente $\mu = 0$ di questa trasformazione, perché ci interessa sapere come trasformi la frequenza dell'onda:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (\omega - vk^1)$$

Detto ora α l'angolo relativo fra \vec{v} e \vec{k} misurato in K (ossia l'angolo relativo fra l'osservatore e la velocità della sorgente), allora $k^1 = |\vec{k}| \cos \alpha = \omega \cos \alpha$.

Pertanto:

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1-v^2}}(1-v\cos\alpha) \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v\cos\alpha} \omega_0$$

Esistono dunque alcuni casi particolari interessanti:

$\alpha = 0$: in questo caso la sorgente si sta avvicinando all'osservatore, e vale:

$$\omega = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v} \omega_0 \stackrel{v \ll 1}{\approx} (1+v) \omega_0$$

$\alpha = \pi$: in questo caso la sorgente si sta allontanando dall'osservatore, e vale:

$$\omega = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v} \omega_0 \stackrel{v \ll 1}{\approx} (1-v) \omega_0$$

$\alpha = \pi/2$: in questo caso la sorgente si muove perpendicolarmente all'osservatore, e si parla di *effetto Doppler trasverso*. Vale:

$$\omega = \sqrt{1-v^2} \omega_0 \stackrel{v \ll 1}{\approx} \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) \omega_0$$

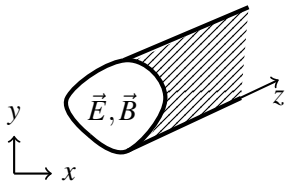
Nel caso non relativistico, questo tipo di fenomeno non è osservabile proprio perché è dell'ordine di v^2

Notiamo dunque che se la sorgente si avvicina all'osservatore, la frequenza osservata dell'onda è maggiore di quella di riposo, e viceversa se la sorgente si allontana. Si ha dunque il *redshift cosmologico*: se una sorgente di onde elettromagnetiche (come ad esempio una stella) si allontana da noi, osserviamo delle frequenze minori di quelle effettivamente emesse dalla stella. In particolare, nel visibile, lo spettro della stella si “sposterà” verso il rosso: per la legge di Hubble, dunque, misurare il redshift di un oggetto equivale a misurarne la distanza da noi. Il *redshift* è definito come:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} - 1 = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1 > 0$$

Un'altra applicazione interessante di quanto visto sono le *guide d'onda*.

Consideriamo delle onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto, ma con delle condizioni al contorno: ad esempio, possiamo “vincolare” le onde a propagarsi all'interno di una guida metallica.



All'interno di questa guida le onde dovranno soddisfare le equazioni di Maxwell nel vuoto, ma sulla guida dovranno soddisfare delle date condizioni: ad esempio, essendo la guida metallica, non potranno esserci componenti del campo elettrico ortogonali ad essa.

Consideriamo dunque delle onde monocromatiche che si propagano lungo la direzione dell'asse z :

$$\vec{E} = e^{-i\omega t} e^{ikz} \vec{E}_0(x, y) + c.c. \quad \vec{B} = e^{-i\omega t} e^{ikz} \vec{B}_0(x, y) + c.c.$$

Nel caso delle onde elementari, \vec{E}_0 e \vec{B}_0 erano vettori costanti, ma in questo caso per le condizioni al contorno dovranno essere funzioni di x e y .

Non trattiamo approfonditamente il problema, ci limitiamo a dire che risulta che la relazione fra k e ω non è più quella semplice delle onde elementari ($k = \omega$), ma sarà del tipo $\omega = \omega(k)$ con ω funzione generica. Possiamo dunque definire la velocità di fase dell'onda come $v_f = \omega/k$, che in alcuni casi può anche risultare maggiore di 1; non si tratta però di un paradosso, perché in realtà la velocità di fase non ha un vero e proprio significato fisico, in quanto le grandezze trasportate da un'onda si muovono con la velocità di gruppo, definita come $v_g = d\omega/dk$, che risulta sempre minore di 1.

3.3 Equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti

Ci proponiamo dunque di risolvere:

$$\square A^\mu = j^\mu \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

ove j^μ è una sorgente nota, che ovviamente soddisfa $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Si tratta sempre di equazioni differenziali lineari, ma stavolta contengono un termine noto. Il metodo col quale si risolve questo tipo di equazioni è il *metodo della funzione di Green*.

3.3.1 Il metodo della funzione di Green

Equazione di Laplace

Consideriamo innanzitutto l'analogo tridimensionale di questa equazione per un campo scalare φ indipendente dal tempo:

$$-\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \quad \varphi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$$

ove ρ è una funzione nota.

Con queste condizioni, esiste un'unica soluzione dell'equazione. Supponiamo infatti che $\bar{\varphi}$ sia una soluzione particolare dell'equazione; allora la soluzione generale sarà $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi_0$, ove φ_0 è soluzione dell'equazione omogenea. Abbiamo già visto, però, che l'unica soluzione dell'equazione omogenea con le condizioni che abbiamo imposto è $\varphi_0 = 0$.

Poiché l'equazione di Laplace è lineare, supponendo di conoscere due funzioni φ_1 e φ_2 tali che $-\nabla^2 \varphi_1 = \rho_1$ e $-\nabla^2 \varphi_2 = \rho_2$, allora $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ risolverà l'equazione $-\nabla^2 \varphi = \rho = \rho_1 + \rho_2$.

Poniamo dunque:

$$\rho(\vec{x}) = \int \rho(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (3.4)$$

(è una definizione tautologica). Allora, se conosciamo la soluzione dell'equazione di Laplace per una $\delta^{(3)}$, dalla (3.4) possiamo ricavare la soluzione generale dell'equazione (la (3.4) è infatti una “sovrapposizione” di $\delta^{(3)}$ opportunamente “pesate” da ρ). Cerchiamo dunque di risolvere l'equazione per $\rho_{\vec{y}}(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$.

Chiamiamo $G(\vec{x}, \vec{y})$ (che è detta *funzione di Green*) la soluzione di quest'equazione, ossia:

$$-\nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

ove il pedice \vec{x} sul laplaciano indica che quest'ultimo agisce solo sulla \vec{x} , e non sulla \vec{y} . Se interpretiamo fisicamente quest'equazione, G è il potenziale elettrostatico corrispondente a una carica puntiforme posta in \vec{y} , che va considerato come una sorta di “parametro”. Nota dunque G , allora si avrà:

$$\varphi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) d^3\vec{y}$$

che è una “sovrapposizione” di più soluzioni elementari, pesate con la ρ . Infatti:

$$-\nabla_{\vec{x}}^2 \varphi(\vec{x}) = -\nabla_{\vec{x}}^2 \int \rho(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) d^3\vec{y} = \int \rho(\vec{y}) (-\nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x}, \vec{y})) d^3\vec{y} = \int \rho(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) d^3\vec{y} = \rho(\vec{x})$$

Notiamo ora che in realtà la G è funzione di una sola variabile come conseguenza dell'invarianza del laplaciano sotto rototraslazioni:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{a} \Rightarrow \nabla_{\vec{x}}^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \rightarrow \nabla_{\vec{x}'}^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x'^i{}^2} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \nabla_{\vec{x}}^2$$

(perché $|\det R| = 1$).

Ora, l'equazione:

$$-\nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

dev'essere vera per ogni \vec{x} e \vec{y} , e dunque anche per ogni \vec{x}' e \vec{y}' :

$$-\nabla_{\vec{x}'}^2 G(\vec{x}', \vec{y}') = \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{y}') \Rightarrow -\nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x}', \vec{y}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto alle proprietà della δ (il modulo del determinante della matrice di una rotazione è 1). Poiché la soluzione di quest'equazione è unica, si dovrà avere:

$$G(\vec{x}', \vec{y}') = G(\vec{x}, \vec{y})$$

Insomma, la funzione di Green “eredita” sempre le simmetrie dell'operatore che agisce su di essa.

Poiché dunque G è invariante per traslazioni, allora potrà solo essere funzione di $\vec{x} - \vec{y}$, ossia $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{x} - \vec{y}) := \tilde{G}(\vec{x})$ (ove nell'ultimo passaggio abbiamo rinominato $\vec{x} - \vec{y}$ con \vec{x}). Poiché è anche invariante per rotazioni, poi, la G dovrà essere funzione del solo modulo di \vec{x} , ossia $G(\vec{x}) = G(|\vec{x}|)$.

Dunque, ricapitolando:

$$-\nabla_{\vec{x}}^2 G(|\vec{x}|) = \delta(|\vec{x}|) \quad (3.5)$$

Sappiamo, per analogia con l'elettrostatica, che la soluzione di quest'equazione è:

$$G(|\vec{x}|) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|}$$

Cerchiamo però di derivarla sistematicamente; per farlo, passiamo alle trasformate di Fourier:

$$G(|\vec{x}|) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{G}(\vec{k}) d^3\vec{k}$$

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3\vec{k} \Rightarrow \hat{\delta}^{(3)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

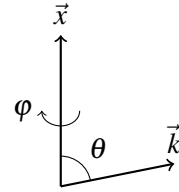
Pertanto, prendendo la trasformata di Fourier ad ambo i membri della (3.5):

$$|\vec{k}|^2 \hat{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \Rightarrow \hat{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{k}|^2} \Rightarrow G(|\vec{x}|) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{|\vec{k}|^2} d^3\vec{k}$$

Per calcolare quest'ultimo integrale conviene pensare \vec{x} come un vettore fisso e \vec{k} variabile, e prendere coordinate polari per \vec{k} rispetto a \vec{x} .

Dunque:

$$d^3\vec{k} = dk d\theta d\varphi \cdot k^2 \sin \theta \Rightarrow d^3\vec{k} = k^2 dk d(\cos \theta) d\varphi$$



e quindi:

$$\begin{aligned} G(|\vec{x}|) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{k^2}{k^2} e^{ik|\vec{x}| \cos \theta} d\varphi d(\cos \theta) dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{ik|\vec{x}| \cos \theta} d(\cos \theta) dk = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{ik|\vec{x}|} \left(e^{ik|\vec{x}|} - e^{-ik|\vec{x}|} \right) dk = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \int_0^\infty \frac{\sin(k|\vec{x}|)}{k} dk = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin k'}{k'} dk'}_{=\pi/2} = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ove nel penultimo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile $k|\vec{x}| = k'$. Dunque:

$$G(|\vec{x}|) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|}$$

e notiamo che effettivamente $G \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$.

Equazione di d'Alembert per A_μ

Passiamo dunque all'analogo problema per il campo elettromagnetico:

$$\square A^\mu = j^\mu \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

Dobbiamo cercare dunque la funzione di Green per il d'alembertiano:

$$\square_x G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y)$$

In questo caso, G “erediterà” le simmetrie di \square , ossia sarà invariante per trasformazioni di Poincaré. Pertanto, $G(x, y) = G(x', y')$; per l’invarianza per traslazioni si dovrà avere $G(x, y) = G(x - y) := G(x)$, e per quella sotto trasformazioni di Lorentz $G(\Lambda x) = G(x)$.

Sembrerebbe dunque che G sia funzione di $x^\mu x_\mu$; è vero, ma in realtà è anche funzione del segno di x^0 , perché anch’esso è invariante di Lorentz.

Nota dunque G , si avrà:

$$A^\mu(x) = \int j^\mu(y) G(x - y) d^4 y \quad (3.6)$$

Infatti:

$$\square_x A^\mu(x) = \int j^\mu(y) \underbrace{\square_x G(x - y)}_{=\delta^{(4)}(x-y)} d^4 y = j^\mu(x)$$

Inoltre:

$$\partial_\mu^x A^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu(x) = \int j^\mu(y) \underbrace{\partial_\mu^x G(x - y)}_{=-\partial_\mu^y G(x - y)} d^4 y = - \int j^\mu(y) \partial_\mu^y G(x - y) d^4 y$$

Adesso integriamo per parti sfruttando le proprietà delle distribuzioni (è sottinteso che tutto ciò che stiamo maneggiando sono distribuzioni). Dunque:

$$\partial_\mu^x A^\mu(x) = \int \underbrace{\partial_\mu j^\mu(y)}_{=0} G(x - y) d^4 y = 0$$

Pertanto, poiché A_μ come definito nella (3.6) soddisfa effettivamente la gauge di Lorenz, è la soluzione che stavamo cercando.

Ci resta dunque solo da determinare G :

$$\square G(x) = \delta(x) \quad G(x) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$$

Il problema è che con queste condizioni la G non è univocamente determinata: se infatti \bar{G} è soluzione particolare dell’equazione, anche $G = \bar{G} + G_0$ con $\square G_0 = 0$ e $G_0 \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ lo è. Dovremo dunque porre altre condizioni per determinare univocamente G .

Passiamo alle trasformate di Fourier:

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ikx} \hat{G}(k) d^4 k \quad \delta^{(4)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} d^4 k$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \square G(x) = \delta(x) &\Rightarrow -k^2 \hat{G}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \Rightarrow \hat{G}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2} \Rightarrow G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{k^2} d^4 k = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \frac{e^{i(k_0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})}}{(k_0)^2 - |\vec{k}|^2} d^3 \vec{k} dk^0 = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 \vec{k} \underbrace{\int \frac{e^{ik_0 x^0}}{(k_0)^2 - |\vec{k}|^2} dk^0}_{:= \mathcal{J}} \end{aligned}$$

L’integrale \mathcal{J} non è però definito, perché l’integrando ha dei poli in $k^0 = \pm |\vec{k}|$. Ci sono però vari modi per “dare senso” a quest’integrale (ad esempio la parte principale), ma non sono metodi univoci. Ciò è conseguenza del fatto che, come già detto, la condizione $G(x) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ non fissa univocamente G .

Per calcolare \mathcal{J} , integriamo nel campo complesso (dunque $k^0 \in \mathbb{C}$). Volendo deformare il cammino d’integrazione “scavalcando” i poli, non sappiamo però quale dei seguenti cammini possibili conviene usare:

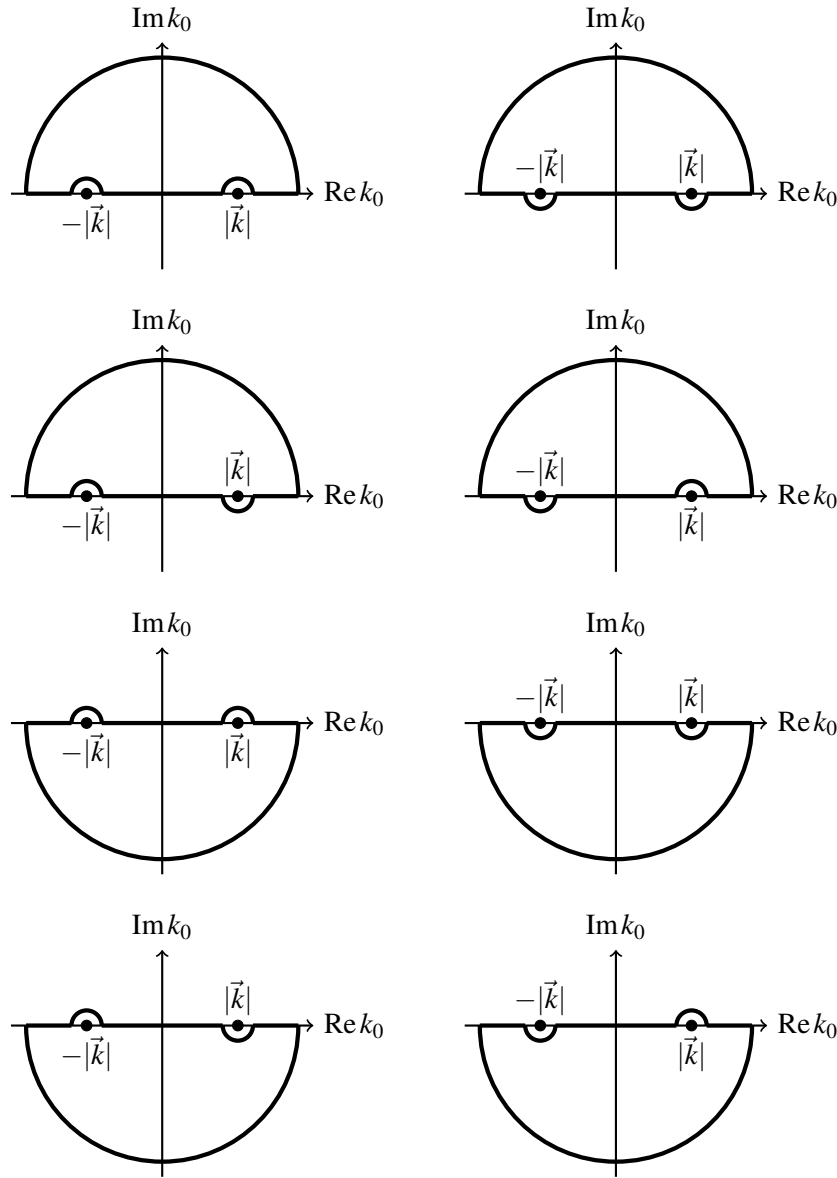


Figura 3.1: Possibili cammini d'integrazione

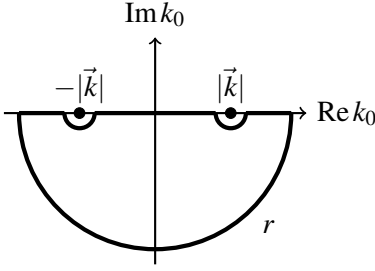
Poiché in \mathcal{S} è presente $e^{ik_0 x^0}$, si presentano due casi:

$x^0 > 0$: in questo caso il cammino va chiuso nel semipiano $\text{Im } k^0 > 0$

$x^0 < 0$: in questo caso il cammino va chiuso nel semipiano $\text{Im } k^0 < 0$

Cerchiamo ora di capire in che modo “scavalcare” i poli (cioè se scavalcarli dal “di sopra” o dal “di sotto”). Ricordiamoci del significato fisico di ciò che stiamo facendo: determinare G equivale a trovare il segnale generato da una carica puntiforme posta in $\vec{x} = 0$ all'istante x^0 ; per il principio di causalità, dunque, $G(x) = 0$ se $x^0 < 0$ (ossia, prima che la sorgente emetta un segnale non c'è alcun campo). È questa la condizione aggiuntiva che dobbiamo porre su G per risolvere il problema.

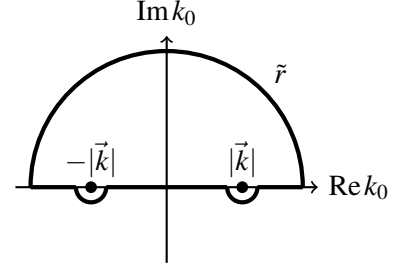
Una funzione di Green G_r che soddisfi la condizione $G_r(x) = 0$ se $x^0 < 0$ è detta *funzione di Green ritardata*. Si potrebbe, analogamente, definire la *funzione di Green anticipata* G_a come una funzione di Green tale che $G_a(x) = 0$ se $x^0 > 0$; matematicamente entrambe sono sensate, ma fisicamente la G_a non lo è (viola palesemente il principio di causalità, perché il suo significato fisico sarebbe quello di rilevare un campo prima ancora che la particella lo emetta).



Dunque, poiché dobbiamo scegliere un cammino di integrazione con $x^0 < 0$, dobbiamo chiuderlo nel semipiano inferiore. Se dunque scavalchiamo i poli dal “di sotto” (chiamiamo r questo cammino di integrazione) allora $G_r(x) = 0$ per $x^0 < 0$: il cammino di integrazione non conterrebbe infatti poli, e pertanto \mathcal{I} , e quindi anche G , sono nulli; se invece li avessimo scavalcati dal “di sopra” si avrebbe avuto $G_r(x) \neq 0$ (in questo caso \mathcal{I} non sarebbe stato nullo).

È dunque chiaro che la condizione $G_r(x) = 0$ per $x^0 < 0$ fissa univocamente la G . Supponiamo ora $x^0 > 0$; il cammino d'integrazione, che chiamiamo \tilde{r} , dovrà essere chiuso nel semipiano superiore perché $x^0 > 0$, ma i poli vanno scavalcati dal “di sotto” per il ragionamento appena fatto. In questo caso, dunque:

$$\mathcal{I} = \oint_{\tilde{r}} \frac{e^{ik^0 x^0}}{(k^0)^2 - |\vec{k}|^2} = 2\pi i \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|x^0}}{-2|\vec{k}|} + \frac{e^{i|\vec{k}|x^0}}{2|\vec{k}|} \right) = -\frac{2\pi}{|\vec{k}|} \sin(|\vec{k}|x^0)$$



Perciò (inseriamo una Θ di Heaviside per “ricordarci” che $G_r(x) = 0$ per $x^0 < 0$):

$$G_r(x) = -\frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^4} (-2\pi) \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\sin(|\vec{k}|x^0)}{|\vec{k}|} d^3\vec{k} = \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\sin(|\vec{k}|x^0)}{|\vec{k}|} d^3\vec{k}$$

Quest'ultimo integrale lo si calcola come abbiamo già visto, ossia pensando \vec{x} come vettore fisso e prendendo coordinate polari per \vec{k} rispetto a \vec{x} :

$$\begin{aligned} G_r(x) &= \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{|\vec{k}|^2}{|\vec{k}|} \sin(|\vec{k}|x^0) e^{-i|\vec{k}||\vec{x}|\cos\theta} d\cos\theta d|\vec{k}| = \\ &= \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} |\vec{k}| \sin(|\vec{k}|x^0) 2 \frac{\sin(|\vec{k}||\vec{x}|)}{|\vec{k}||\vec{x}|} d|\vec{k}| = \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^2} \frac{2}{|\vec{x}|} \int_0^{+\infty} \sin(|\vec{k}|x^0) \sin(|\vec{k}||\vec{x}|) d|\vec{k}| \end{aligned}$$

Poiché l'integrando è pari, e scrivendo k per $|\vec{k}|$:

$$G_r(x) = \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx^0} - e^{-ikx^0}}{2i} \frac{e^{ik|\vec{x}|} - e^{-ik|\vec{x}|}}{2i} dk = \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \left(-\frac{1}{4} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left(e^{ik(x^0+|\vec{x}|)} - e^{ik(x^0-|\vec{x}|)} \right) dk$$

Ricordando la rappresentazione integrale della delta di Dirac:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk$$

allora:

$$G_r(x) = \frac{\Theta(x^0)}{4\pi|\vec{x}|} [\delta(x^0 - |\vec{x}|) - \delta(x^0 + |\vec{x}|)]$$

La seconda delta di Dirac, però, non contribuisce perché imporrebbe $x^0 < 0$, mentre la Θ impone $G_r(x) = 0$ per $x^0 < 0$. Pertanto (adesso possiamo evitare di scrivere la Θ , in quanto l'informazione $x^0 < 0$ è contenuta nella δ):

$$G_r(x) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x^0 - |\vec{x}|) \quad (3.7)$$

È un risultato identico a quello che avevamo trovato per l'equazione di Laplace, a meno della delta di Dirac. La presenza di $\delta(x^0 - |\vec{x}|)$ ha un preciso significato fisico: è un modo per esprimere il fatto che il segnale emesso dalla carica si muove alla velocità della luce: se infatti la carica emette segnale dalla posizione $\vec{x} = 0$ all'istante $x^0 = 0$, un'osservatore in \vec{x} potrà misurare il campo solo a $x^0 = |\vec{x}|$.

Potrebbe sorgere però il dubbio che G_r non sia un invariante di Lorentz (si dovrebbe avere, infatti, che $G(\Lambda x) = G(x)$). Anche quando avevamo definito G_r , inoltre, la condizione $x^0 < 0$ non è apparentemente invariante di Lorentz; in realtà tutto ciò non è vero, e sia G_r che la condizione $x^0 < 0$ sono Lorentz-invarianti.

Per mostrarlo, consideriamo $\delta(x^2)$ (ove x^2 è il quadrato di x nel senso di Minkowski); si ha che $\delta(x^2)$ è sicuramente un oggetto invariante, e vale:

$$\delta(x^2) = \delta((x^0)^2 - |\vec{x}|^2) = \frac{\delta(x^0 - |\vec{x}|) + \delta(x^0 + |\vec{x}|)}{2|x^0|} = \frac{\delta(x^0 - |\vec{x}|) + \delta(x^0 + |\vec{x}|)}{2|\vec{x}|}$$

Pertanto, poiché:

$$\Theta(x^0)\delta(x^2) = \frac{\delta(x^0 - |\vec{x}|)}{2|\vec{x}|}$$

allora:

$$G_r(x) = \frac{1}{2\pi}\Theta(x^0)\delta(x^2) \quad (3.8)$$

che è un'altra forma della G_r equivalente alla (3.7).

Mostriamo ora che $\Theta(x^0)$ è invariante di Lorentz come conseguenza del fatto che $x^2 \geq 0$. Poiché $x^2 \geq 0$ stiamo considerando gli eventi all'interno del cono luce di x ; consideriamo dunque un evento nel cono luce con $x^0 > 0$. Allora non esiste alcuna trasformazione di Lorentz tale che $(x')^0 < 0$: infatti, ricordandoci che $\Lambda \in SO(1,3)_c$, se per assurdo una tale trasformazione esistesse dovrebbe esistere tutta una serie continua di trasformazioni ($SO(1,3)_c$ è un gruppo di Lie), ossia dovrebbe esistere un cammino continuo che connette i due eventi (quello con $x^0 > 0$ e quello con $(x')^0 < 0$), che necessariamente dovrà passare per l'origine del cono luce (una trasformazione di Lorentz, infatti, non può far uscire dal cono luce). Ciò però significa che la trasformazione non è invertibile, mentre invece tutte le trasformazioni di $SO(1,3)_c$ lo sono (o, in altre parole, se $x^\mu \neq 0$ allora $(\Lambda x)^\mu \neq 0$): pertanto, non esiste alcuna trasformazione che cambia il segno di x^0 .

3.3.2 Soluzione delle equazioni di Maxwell

Tornando dunque al problema delle equazioni di Maxwell, vogliamo risolvere $\square A^\mu = j^\mu$ con la condizione $\partial_\mu A^\mu = 0$ e j^μ noto. Sappiamo già (vedi (3.6)) che si dovrà avere:

$$A^\mu(x) = \int G_r(x-y)j^\mu(y)d^4y$$

Usando la (3.7), dunque:

$$A^\mu(x) = \int \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} j^\mu(y^0, \vec{y}) d^4y = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^\mu(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

Pertanto, la soluzione più generale possibile delle equazioni di Maxwell è:

$$A^\mu(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^\mu(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (3.9)$$

Il termine $x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|$ in j^μ tiene conto del ritardo dovuto al fatto che il campo si propaga alla velocità della luce, e non istantaneamente.

Reintroducendo le c , la (3.9) è:

$$A^\mu(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^\mu\left(x^0 - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

Possiamo anche riscrivere A^μ sfruttando la (3.8):

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int \Theta(x^0 - y^0) \delta((x-y)^2) j^\mu(y) d^4y \quad (3.10)$$

Capitolo 4

Campo elettromagnetico di una carica in moto qualunque

Vogliamo ora sfruttare il risultato trovato per determinare il campo elettromagnetico emesso da una carica puntiforme in moto qualunque.

4.1 Potenziale di Lienard-Wiechert

Consideriamo dunque una particella carica in moto qualunque con linea d'universo $y^\mu(s)$. La quadricorrente ad essa associata sarà:

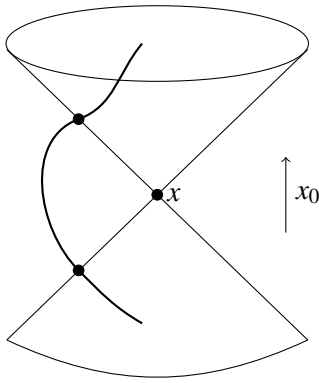
$$j^\mu(y) = e \int u^\mu(s) \delta^{(4)}(y - y(s)) ds$$

e inserendola nella (3.10):

$$A^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \int \int \Theta(x^0 - y^0) \delta((x - y)^2) u^\mu(s) \delta^{(4)}(y - y(s)) d^4y ds$$

$$\Rightarrow A^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \int \Theta(x^0 - y^0(s)) \delta((x - y(s))^2) u^\mu(s) ds$$

Cerchiamo di interpretare “geometricamente” la situazione, per capire meglio cosa stiamo facendo. L'evento che abbiamo chiamato x è quello nel quale si misura il campo emesso dalla particella. Consideriamo poi il cono luce di x ; la particella descriverà una certa linea d'universo nello spaziotempo, che intersecherà il cono luce in due punti (questo fatto lo dimostreremo fra poco), che sono proprio i punti che soddisfano $(x - y(s))^2 = 0$, ossia quelli “selezionati” dalla δ .



La Θ nell'integrale, poi, di questi due punti seleziona solo quello con $x^0 - y^0(s) > 0$; sia dunque \bar{s} il tempo proprio della particella tale che $(x - y(\bar{s}))^2 = 0$ e $x^0 - y^0(\bar{s}) > 0$ (ovviamente $\bar{s} = \bar{s}(x)$, ossia \bar{s} dipende dal punto di osservazione x). Allora:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \frac{u^\mu(\bar{s})}{\left| \frac{d}{ds}(x - y(s))^2 \right|_{s=\bar{s}}}$$

Si ha:

$$\frac{d}{ds}(x - y(s))^2 \Big|_{s=\bar{s}} = 2(x - y(\bar{s})) \left(-\frac{dy(\bar{s})}{ds} \right) = -2(x - y(\bar{s}))u(\bar{s})$$

Ora, poiché $(x - y(\bar{s}))u(\bar{s})$ è un'invariante di Lorentz, possiamo valutarlo in qualunque sistema di riferimento: scegliamo quello di quiete istantanea della particella; ciò che vogliamo fare è determinarne il segno, di modo da non inserire moduli nell'espressione di A^μ . In questo sistema di riferimento, poiché $u^\mu(\bar{s}) = (1, 0, 0, 0)$:

$$-2(x - y(\bar{s}))u(\bar{s}) = -2(x^0 - y^0(\bar{s}))$$

e poiché $x^0 - y^0(\bar{s}) > 0$ per ipotesi:

$$\left| \frac{d}{ds} (x - y(s))^2 \Big|_{s=\bar{s}} \right| = 2(x - y(\bar{s}))u(\bar{s})$$

Perciò:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu(\bar{s})}{(x - y(\bar{s}))u(\bar{s})} \quad (4.1)$$

Per rendere completamente esplicita la formula bisogna conoscere \bar{s} , cosa possibile solo se si conosce la linea d'universo della particella.

Riscriviamo ora la (4.1) in un'altra forma non completamente covariante: scegliamo come parametrizzazione della linea d'universo della particella il tempo t' , ossia $y^\mu(s) \rightarrow y^\mu(t') = (t', \vec{y}(t'))$. Con questa scelta:

$$(x - y(s))^2 = (t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{y}(t')|^2 \Rightarrow (x - y(\bar{s}))^2 = 0 \Leftrightarrow t - \bar{t} = |\vec{x} - \vec{y}(\bar{t})|$$

ove \bar{t} è il tempo che corrisponde a \bar{s} (non abbiamo messo \pm di fronte al modulo perché sappiamo già che $x^0 - y^0(\bar{s}) > 0$).

L'equazione $t - \bar{t} = |\vec{x} - \vec{y}(\bar{t})|$ determina dunque \bar{t} come funzione di t e \vec{x} , ossia $\bar{t} = \bar{t}(t, \vec{x})$.

Ricordando inoltre che $u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$, allora:

$$u(\bar{s})(x - y(\bar{s})) = \gamma[t - \bar{t} - \vec{v} \cdot (\vec{x} - \vec{y}(\bar{t}))] = \gamma[|\vec{x} - \vec{y}(\bar{t})| - \vec{v} \cdot (\vec{x} - \vec{y}(\bar{t}))]$$

Dunque:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{(1, \vec{v}(\bar{t}))}{|\vec{x} - \vec{y}(\bar{t})| - \vec{v} \cdot (\vec{x} - \vec{y}(\bar{t}))}$$

che è detto *potenziale di Lienard-Wiechert*.

Prima di passare alle sue applicazioni, dimostriamo l'esistenza e l'unicità di \bar{s} .

Consideriamo dunque particelle con massa a riposo non nulla, e tali che:

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} (x - y(s))^2 = +\infty$$

Ad esempio, se la traiettoria della particella è tale che:

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u^\mu(s) = u^\mu_\pm$$

con u^μ_\pm quadriettore costante, allora la condizione è soddisfatta. Infatti:

$$y^\mu(s) \stackrel{s \rightarrow \pm\infty}{\sim} u^\mu_\pm s \stackrel{s \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} \pm\infty$$

e dunque:

$$(x - y(s))^2 = x^2 + y^2 - 2x_\mu y^\mu(s) \stackrel{s \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^2 + s^2 - 2sx_\mu u^\mu_\pm \stackrel{s \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} +\infty$$

Con questa condizione escludiamo casi fisicamente non riproducibili, come ad esempio il caso di una particella accelerata indefinitamente.

Dimostriamo dunque l'esistenza e l'unicità di \bar{s} a partire da queste ipotesi.

Sia dunque $f(s) = (x - y(s))^2$; vogliamo dimostrare che f ha uno e un solo zero con $x^0 - y^0(s) > 0$. Per ipotesi, f tende all'infinito per s tendente a $\pm\infty$: pertanto f dovrà avere almeno un minimo (locale). Esiste dunque un a tale che $f'(a) = 0$.

Mostriamo ora che tutti gli eventuali massimi o minimi locali si trovano nel semipiano inferiore (ossia sono tali che $f(s) < 0$). Poiché f è invariante di Lorentz, possiamo valutarla in un qualunque sistema di riferimento; scegliamo quello di quiete istantanea della particella per $s = a$. In questo sistema di riferimento si ha $u^\mu(a) = (1, 0, 0, 0)$; inoltre:

$$f'(s) = -2(x - y(s))u(s)$$

e dunque, nel sistema di riferimento di quiete istantanea della particella, a $s = a$:

$$f'(a) = -2(x^0 - y^0(a))$$

I massimi o minimi di f sono dunque i punti per i quali $x^0 - y^0(a) = 0$.

Si ha quindi:

$$f(a) = (x^0 - y^0(a))^2 - |\vec{x} - \vec{y}(a)|^2 = -|\vec{x} - \vec{y}(a)|^2 \leq 0$$

In realtà, consideriamo solo il caso $f(a) < 0$, ignorando i casi “patologici” nei quali vale l’uguaglianza. Esistono pertanto due (e due soli) zeri di f , che chiamiamo s^+ e s^- :

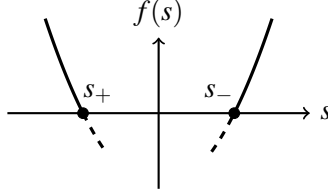


Figura 4.1: Andamento di $f(s)$

È chiaro che $f'(s^+) < 0$ e $f'(s^-) > 0$; d'altra parte, però, nel sistema di riferimento di quiete istantanea della particella si ha $f'(s) = -2(x^0 - y^0(s))$, e pertanto:

$$f'(s^+) = -2(x^0 - y^0(s^+)) < 0 \quad \Rightarrow \quad x^0 - y^0(s^+) > 0$$

La dimostrazione è quindi conclusa.

Vediamo ora, per completezza, dei casi nei quali le ipotesi di questo teorema non sono verificate.

Consideriamo dunque una particella in moto uniformemente accelerato in una dimensione x ; si ha ($a > 0$):

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = a \quad \Rightarrow \quad y^\mu(s) = \frac{1}{a}(\sinh(as), \cosh(as), 0, 0)$$

Dunque:

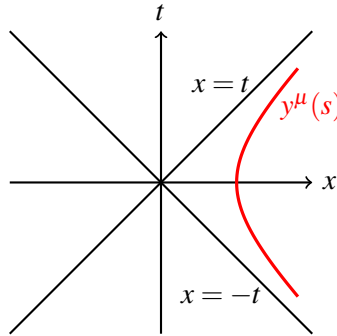


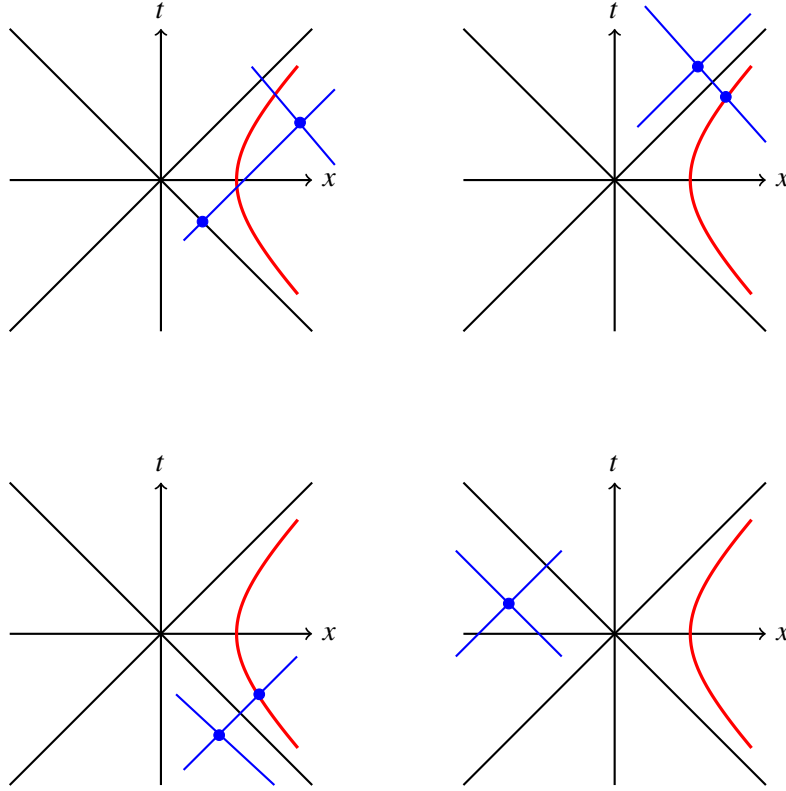
Figura 4.2: Linea d'universo della particella

Poiché risulta:

$$(x - y(s))^2 \stackrel{s \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{e^{as}}{a} (x - t)$$

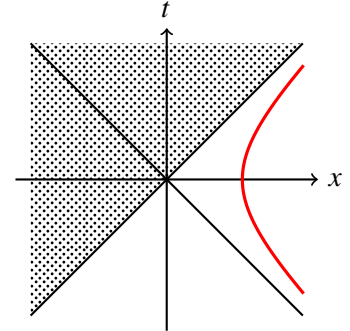
il limite di $(x - y(s))^2$ per $s \rightarrow \pm\infty$ non ha segno definito (vale infatti $+\infty$ se $x > t$ e $-\infty$ se $x < t$). Pertanto le ipotesi del teorema non sono soddisfatte.

Questo fatto può essere inteso anche dal disegno in figura 4.2: se si misura il campo emesso dalla particella (ovviamente supponendo che sia carica) in determinati punti dello spaziotempo si vede che il teorema non vale più:



I problemi, insomma, nascono se x si trova nel secondo o nel terzo quadrante.

Anche se questa situazione non è fisicamente realizzabile, è comunque interessante, e ha rilevanza ad esempio nello studio della relatività generale, e in particolare dei buchi neri: la parte di universo evidenziata in figura, infatti, è completamente inaccessibile alla particella (un eventuale segnale di un osservatore in quella zona non può essere ricevuto dalla particella, o un segnale emesso dalla particella non può raggiungere l'osservatore). Un osservatore solidale con la particella, dunque, vede un orizzonte degli eventi (apparente perché dipende dal sistema di riferimento). Per il principio di equivalenza in relatività generale, dunque, questo è anche ciò che rilevarebbe un osservatore non accelerato ma in presenza di gravità.



4.1.1 Espressione esplicita dei campi

Vogliamo dunque esprimere esplicitamente \vec{E} e \vec{B} a partire dal potenziale di Lienard-Wiechert:

$$A^\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu(\bar{s})}{u(\bar{s})(x - y(\bar{s}))}$$

Poniamo per brevità $L^\mu = x^\mu - y^\mu(\bar{s})$; dunque, $\bar{s} = \bar{s}(x)$ è tale che $L^\mu L_\mu = 0$ e $L^0 > 0$. Quindi:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{e}{4\pi} \left[\frac{\partial^\mu u^\nu(\bar{s})}{u \cdot L} - \frac{u^\nu}{(u \cdot L)^2} \partial^\mu (u \cdot L) - (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

ove con $(\mu \leftrightarrow \nu)$ si intendono gli stessi termini precedenti con gli indici μ e ν scambiati.

Si ha:

$$\partial^\mu u^\nu = \frac{du^\nu}{ds} \partial^\mu \bar{s} \quad \partial^\mu L^\lambda = \eta^{\mu\lambda} - \frac{dy^\mu}{ds} \partial^\mu \bar{s} = \eta^{\mu\lambda} - u^\lambda \partial^\mu \bar{s}$$

$$\partial^\mu (u^\lambda L_\lambda) = (\partial^\mu u^\lambda) L_\lambda + u_\lambda \partial^\mu L^\lambda = (w^\lambda \partial^\mu \bar{s}) L_\lambda + u^\mu - u_\lambda u^\lambda \partial^\mu \bar{s} = (w^\lambda L_\lambda - 1) \partial^\mu \bar{s} + u^\mu$$

Per determinare $\partial^\mu \bar{s}$, deriviamo l'equazione che la definisce:

$$\partial^\mu (L^\lambda L_\lambda) = 2L_\lambda \partial^\mu L^\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(L^\mu - u_\lambda L^\lambda \partial^\mu \bar{s}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu \bar{s} = \frac{L^\mu}{u_\lambda L^\lambda}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(u \cdot L)^3} [(u \cdot L)w^\nu L^\mu - u^\mu(u \cdot L) + L^\mu(w \cdot L - 1))u^\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)] = \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(u \cdot L)^3} [L^\mu u^\nu + L^\mu((u \cdot L)w^\nu - (w \cdot L)u^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu)] \end{aligned}$$

Separiamo dunque i termini che dipendono da w , che chiameremo *termini di accelerazione*, da quelli che non ci dipendono, che diremo *termini di velocità*:

$$F^{\mu\nu} = F_v^{\mu\nu} + F_a^{\mu\nu}$$

Per rendere più comprensibile la notazione, chiamiamo R la distanza fra il punto di osservazione e la posizione della particella all'istante \bar{s} , ossia $R = |\vec{x} - \vec{y}(\bar{s})|$; per definizione, dunque, $R = t - y^0(\bar{s}) = L^0$. Introduciamo poi il quadrivettore:

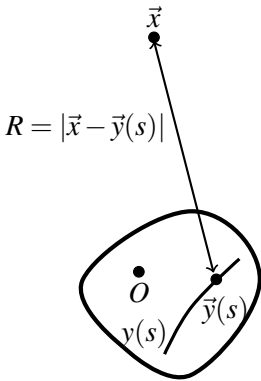
$$m^\mu = \frac{L^\mu}{R} = \left(1, \frac{\vec{x} - \vec{y}(\bar{s})}{|\vec{x} - \vec{y}(\bar{s})|}\right)$$

(la sua parte spaziale è il versore della direzione d'osservazione). Per costruzione, $m^\mu m_\mu = 0$, e $u \cdot L = R(u \cdot m)$ e $u \cdot m$ non dipende da R .

Pertanto, i termini di velocità vanno come $1/R^2$, mentre quelli di accelerazione come $1/R$: si annullano dunque in modo diverso all'infinito. Infatti:

$$F_v^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi(u \cdot m)^3} \frac{1}{R^2} (m^\mu u^\nu - m^\nu u^\mu)$$

$$F_a^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi(u \cdot m)^3} \frac{1}{R} [m^\mu((u \cdot m)w^\nu - (w \cdot m)u^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu)]$$



Immaginiamo dunque che la particella si muova in una regione finita di spazio e di osservarne il campo emesso a grandi distanze.

Poiché $|\vec{x}| \gg |\vec{y}(\bar{s})|$, allora $R \approx |\vec{x}|$. Dunque:

$$F_v^{\mu\nu} \sim \frac{1}{R^2} \quad F_a^{\mu\nu} \sim \frac{1}{R}$$

Vedremo poi che i termini di accelerazione sono i responsabili del fenomeno dell'irraggiamento.

Cerchiamo quindi l'espressione esplicita di \vec{E} e \vec{B} . Notiamo innanzitutto che:

$$F_{v/a}^{\mu\nu} = m^\mu V_{v/a}^\nu - m^\nu V_{v/a}^\mu$$

per un opportuno V^μ , che dipende dalla situazione. In particolare:

$$V_v^\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(u \cdot m)^3} \frac{u^\mu}{R^2} \quad V_a^\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(u \cdot m)^3} \frac{(u \cdot m)w^\mu - (w \cdot m)u^\mu}{R}$$

Dunque:

$$E^i = F^{i0} = m^i V^0 - m^0 V^i = m^i V^0 - V^i$$

$$B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk} = -\epsilon^{ijk} m^j V^k = \epsilon^{ijk} m^j E^k$$

L'ultima rappresentazione scritta per B^i vale infatti perché:

$$\epsilon^{ijk} m^j E^k = \epsilon^{ijk} m^j (m^k V^0 - V^k) = -\epsilon^{ijk} m^j V^k$$

Ciò implica che $\vec{B} = \vec{m} \times \vec{E}$; dal modo in cui l'abbiamo ricavata, deduciamo che è un'espressione valida sia per i campi di velocità che per quelli di accelerazione.

Calcoliamo dunque \vec{E}_v e \vec{E}_a , per poi ricavare \vec{B} con $\vec{B} = \vec{m} \times \vec{E}$. Sostituendo u con la sua espressione in termini di \vec{v} e reintroducendo le c :

$$\vec{E}_v = \frac{e}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\vec{m} - \frac{\vec{v}}{c}}{\left(1 - \vec{m} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)^3}$$

con $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ e $R = |\vec{x} - \vec{y}(\vec{r})|$. Notare che, per $c \rightarrow \infty$, \vec{E}_v si riconduce all'espressione classica del campo elettrostatico di una particella puntiforme.

Vale poi:

$$\vec{B}_v = \vec{m} \times \vec{E}_v = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}_v$$

perché $\vec{m} \times (\vec{m} - \vec{v}) = \vec{v} \times (\vec{m} - \vec{v})$. Da ciò vediamo innanzitutto che $|\vec{B}_v| \ll |\vec{E}_v|$ se $v \ll c$.

Passiamo ora ai campi di accelerazione. Per quanto riguarda il campo elettrico si ha:

$$E_a^i = m^i V_a^0 - V_a^i \quad V_a^\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(u \cdot m)^3} \frac{1}{R} [(u \cdot m)w^\mu - (w \cdot m)u^\mu]$$

Vogliamo dunque esprimere \vec{E}_a in termini di quantità misurabili. Poiché si ha:

$$w^\mu = \gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{v} u^\mu + \gamma^2 (0, \vec{a})$$

allora il termine proporzionale a u^μ si semplifica nell'espressione di V_a^μ , e non contribuisce al suo valore. Per i nostri scopi, dunque, possiamo porre $w^\mu = \gamma^2 (0, \vec{a})$, e pertanto, poiché $w \cdot m = -\gamma^2 \vec{m} \cdot \vec{a}$:

$$V_a^0 = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{m} \cdot \vec{v})^3} \frac{1}{R} \vec{m} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{V}_a = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{m} \cdot \vec{v})^3} \frac{1}{R} [(1 - \vec{m} \cdot \vec{v})\vec{a} + (\vec{m} \cdot \vec{a})\vec{v}]$$

Dunque:

$$\vec{E}_a = \frac{e}{4\pi R} \frac{1}{(1 - \vec{m} \cdot \vec{v})^3} [(\vec{m} \cdot \vec{a})(\vec{m} - \vec{v}) - (1 - \vec{m} \cdot \vec{v})\vec{a}]$$

e ricordando che $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\vec{E}_a = \frac{e}{4\pi R} \frac{1}{(1 - \vec{m} \cdot \vec{v})^3} \vec{m} \times [(\vec{m} - \vec{v}) \times \vec{a}]$$

(ovviamente poi $\vec{B}_a = \vec{m} \times \vec{E}_a$).

Reintroducendo i fattori c :

$$\vec{E}_a = \frac{e}{4\pi R c^2} \frac{1}{(1 - \vec{m} \cdot (\vec{v}/c))^3} \vec{m} \times \left[\left(\vec{m} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right]$$

Si tratta dunque di un tipo di campo puramente relativistico: nel limite $c \rightarrow \infty$, infatti, $\vec{E}_a \rightarrow 0$.

Poco fa, nel caso dei campi di velocità, avevamo visto che se $v \ll c$ allora $|\vec{B}_v| \ll |\vec{E}_v|$; nel caso dei campi di accelerazione, invece, ciò non avviene: infatti poiché \vec{E}_a è ortogonale a \vec{m} e $\vec{B}_a = \vec{m} \times \vec{E}_a$, allora $|\vec{E}_a| = |\vec{B}_a|$, ossia per i campi di accelerazione, anche nel caso di velocità molto piccole, i moduli del campo elettrico e magnetico coincidono. Non è un caso, e vedremo fra un po' perché.

Vediamo ora un paio di applicazioni.

4.1.2 Campo di una carica in moto uniforme

Il potenziale del campo coulombiano di una carica ferma è:

$$A'^0(x') = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}'|} \quad (4.2)$$

ove abbiamo indicato con K' il sistema di riferimento solidale alla carica, ove dunque vale la (4.2) e $\vec{A}'(x') = 0$. Come sappiamo, per determinare il campo in un sistema di riferimento K nel quale la particella si muove di moto rettilineo uniforme applichiamo una trasformazione di Lorentz:

$$A^\mu(x) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\nu} A'^\nu(x')$$

ove $\Lambda : K \rightarrow K'$.

Ricaviamo ora però questo risultato a partire dal potenziale di Lienard-Wiechert:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu}{u \cdot (x - y(\bar{s}))}$$

con u^μ costante, $(x - y(\bar{s}))^2 = 0$ e $x^0 - y^0(\bar{s}) > 0$. Dobbiamo dunque determinare \bar{s} . La linea d'universo della particella è $y^\mu(s) = u^\mu s$, e dunque:

$$(x - y(s))^2 = x^2 - 2(x \cdot u)s + u^2 s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = (x \cdot u) \pm \sqrt{(x \cdot u)^2 - x^2}$$

Per verificare che questo risultato abbia senso dobbiamo vedere se il radicando è negativo o meno; poiché è una quantità invariante, calcoliamolo nel sistema di riferimento di quiete istantanea della particella, ove $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$:

$$(x \cdot u)^2 - x^2 = (x^0)^2 - (x^0)^2 + |\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2 \geq 0$$

Pertanto esistono due s tali che $(x - y(s))^2 = 0$, come già avevamo dimostrato. Ci resta dunque da capire quale di queste due soluzioni è tale che $x^0 - y^0(s) > 0$:

$$x^0 - y^0(\bar{s}) = x^0 - u^0 \bar{s}$$

Il segno di questa quantità è invariante, e pertanto lo valutiamo in K' :

$$x^0 - u^0 \bar{s} = x^0 - (x \cdot u) \mp |\vec{x}| = x^0 - x^0 \mp |\vec{x}| = \mp |\vec{x}|$$

Dunque, affinché $x^0 - y^0(\bar{s}) > 0$ si deve avere:

$$\bar{s} = (x \cdot u) - \sqrt{(x \cdot u)^2 - x^2}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} u \cdot (x - y(\bar{s})) &= (u \cdot x) - u \cdot y(\bar{s}) = (u \cdot x) - (u \cdot u) \bar{s} = (u \cdot x) - \bar{s} = \\ &= (u \cdot x) - (x \cdot u) + \sqrt{(x \cdot u)^2 - x^2} = \sqrt{(x \cdot u)^2 - x^2} \end{aligned}$$

e dunque:

$$A^\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu}{\sqrt{(x \cdot u)^2 - x^2}}$$

Quest'oggetto si trasforma come un quadrivettore (com'è giusto che sia), e se lo valutiamo in K' ci si riconduce al potenziale coulombiano:

$$A'^\mu(x') = \frac{e}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{x}'|}, 0, 0, 0 \right)$$

Il risultato che abbiamo trovato coincide dunque necessariamente con quello determinato con le trasformazioni di Lorentz.

A questo punto, esplicitiamo il campo elettrico attraverso il tensore elettromagnetico:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \left[\frac{u^\nu}{((u \cdot x)^2 - x^2)^{3/2}} \frac{1}{2} (2(x \cdot u)u^\mu - 2x^\mu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \quad \Rightarrow \quad F^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi} \frac{x^\mu u^\nu - x^\nu u^\mu}{((u \cdot x)^2 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Dunque, esprimendo \vec{E} in termini di quantità misurabili, risulta:

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi} (1 - v^2) \frac{\vec{x} - \vec{v}t}{\left[(1 - v^2)R_0^2 + (\vec{v} \cdot \vec{R}_0)^2 \right]^{3/2}}$$

ove:

$$\vec{R}_0 = \vec{x} - \vec{v}t \quad (x \cdot u)^2 - x^2 = R_0^2 + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{R}_0)^2}{1 - v^2}$$

(la verifica della seconda relazione è lasciata per esercizio). Da notare che $\vec{R}_0 \neq \vec{R}$: uno è valutato in t e l'altro in \bar{t} .

Questa formula dipende dai due vettori \vec{R}_0 e \vec{v} : se chiamiamo θ l'angolo fra di loro, allora $\vec{v} \cdot \vec{R}_0 = |\vec{v}| |\vec{R}_0| \cos \theta$, e quindi:

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

Osserviamo che questa formula senza il fattore centrale si riduce al campo coulombiano non relativistico; è inoltre radiale, ossia diretta come la congiungente osservatore-sorgente *nello stesso istante* (è “un caso” che sia così).

Studiamo ora la dipendenza di \vec{E} da θ . Se $\theta = 0$, ossia se si osserva il campo in direzione parallela al moto della carica, allora:

$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{e}{4\pi} (1 - v^2) \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

Se invece $\theta = \pi/2$, ossia se si osserva il campo in direzione perpendicolare al moto della carica, allora:

$$\vec{E}_{\perp} = \frac{e}{4\pi} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2)^{3/2}} \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} = \frac{e}{4\pi} \gamma \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

Pertanto, maggiore è la velocità della particella, più intenso è \vec{E}_{\perp} e più debole è \vec{E}_{\parallel} ; questo fatto è conseguenza della contrazione delle lunghezze.

“Graficamente”, la situazione è la seguente:

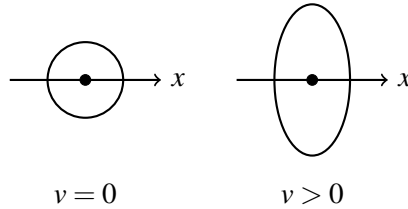


Figura 4.3: “Aspetto” del campo elettrico

4.2 L'irraggiamento

Finora abbiamo studiato il campo generato da una singola particella. Se invece ne sono presenti più di una, poiché le equazioni di Maxwell sono lineari il campo totale è la somma dei campi delle singole particelle. Dunque, se s è l'indice che denota le particelle:

$$\vec{E}_a^{TOT} = \sum_s \vec{E}_a^{(s)} \quad \vec{B}_a^{TOT} = \sum_s \vec{B}_a^{(s)}$$

Definendo per ogni particella il versore:

$$\vec{m}^{(s)} = \frac{\vec{x} - \vec{y}^{(s)}(\bar{t}_s)}{|\vec{x} - \vec{y}^{(s)}(\bar{t}_s)|}$$

(ossia il versore della direzione di osservazione della singola particella), sappiamo che:

$$\vec{m}^{(s)} \cdot \vec{E}_a^{(s)} = 0 \quad \vec{B}_a^{(s)} = \vec{m}^{(s)} \times \vec{E}_a^{(s)}$$

Il problema è che la determinazione del campo totale può essere terribilmente complicata, in quanto non esiste un unico versore \vec{n} di propagazione dell'onda, e in generale \vec{B}^{TOT} non è ortogonale a \vec{E}^{TOT} .

Nel caso però in cui si osservi il campo a grandi distanze dalle cariche (che, come vedremo fra poco, è il caso fisicamente più interessante), ossia se $\vec{x} \gg |\vec{y}^{(s)}(t)|$, allora:

$$\vec{m}^{(s)} \longrightarrow \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} := \vec{n}$$

e le formule precedenti, in questo limite, si semplificano notevolmente:

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_a^{TOT} = 0 \quad \vec{B}_a^{TOT} = \vec{n} \times \vec{E}_a^{TOT}$$

Vogliamo dunque studiare l'emissione di quadrimomento da parte di un sistema di cariche in moto, fenomeno che va sotto il nome di *irraggiamento*.

Sappiamo che se in una certa regione di spazio c'è del campo elettromagnetico, allora ad esso si può associare un quadrimomento P^μ tale che:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \int_{\Gamma} T_{\text{emg}}^{i\mu} d\Sigma^i$$

ove Γ è il bordo della regione di spazio contenente il nostro insieme di cariche in moto (che dunque non usciranno mai da Γ). Il secondo membro di quest'espressione è però proprio il flusso di quadrimomento attraverso Γ ; in genere interessa conoscere il flusso di quadrimomento totale emesso da un sistema di cariche: per determinarlo basta prendere come superficie Γ una sfera di raggio r e far tendere r all'infinito. Allora si avrà $d\Sigma^i = n^i r^2 d\Omega$, e:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int T_{\text{emg}}^{i\mu} n^i d\Omega$$

Spesso può interessare anche conoscere la distribuzione angolare del quadrimomento emesso, ossia la dipendenza dell'emissione di quadrimomento dall'angolo. Allora:

$$\frac{dP^\mu}{dt d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 T_{\text{emg}}^{i\mu} n^i \quad (4.3)$$

Per determinare queste quantità, tuttavia, basta conoscere l'andamento dei campi all'infinito per via della presenza del limite: è per questo che prima abbiamo detto che la situazione fisica più interessante è lo studio dei campi a grandi distanze dalle cariche che li hanno generati. Affinché quelle appena definite siano quantità sensate, si dovrà avere:

$$T_{\text{emg}}^{i\mu} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{r^2}$$

e poiché $T_{\text{emg}}^{\mu\nu} \propto (F^{\mu\nu})^2$, allora si dovrà avere:

$$F^{\mu\nu} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{r}$$

Gli unici campi che vanno come $1/r$ all'infinito sono però i campi di accelerazione: è per questo che solo loro contribuiscono al fenomeno dell'irraggiamento. In altre parole, una carica può irraggiare *solo* se è accelerata.

Un'altra quantità di grande interesse fisico è l'energia emessa per unità di tempo e angolo solido, ossia la componente $\mu = 0$ della (4.3):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt d\Omega} = \frac{dW}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 T_{\text{emg}}^{i0} n^i = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 S^i n^i$$

ove \vec{S} è il vettore di Poynting¹. Poiché si ha:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \vec{E}_a \times \vec{B}_a = \vec{E}_a \times (\vec{n} \times \vec{E}_a) = \vec{n} |\vec{E}_a|^2 - \vec{E}_a (\vec{n} \cdot \vec{E}_a) = \vec{n} |\vec{E}_a|^2$$

¹ Ricorda che $S^i = T_{\text{emg}}^{i0}$.

allora:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 n^i n^i |\vec{E}_a|^2 \Rightarrow \frac{dW}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |\vec{E}_a|^2$$

Notiamo che poiché $\vec{S} \parallel \vec{n}$, l'energia è sempre emessa, e mai assorbita: ciò è conseguenza del fatto che abbiamo scelto la soluzione ritardata per risolvere le equazioni di Maxwell. Inoltre, poiché $|\vec{E}_a| \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} 1/r$ il limite è finito, e pertanto per r abbastanza grande l'energia emessa fluisce conservandosi (in quanto non dipende più da r).

Per poter rendere concretamente utili queste formule dobbiamo avere un modo per calcolare il campo \vec{E}_a a grandi distanze dalle cariche. Potremmo sfruttare direttamente le espressioni del campo di Lienard-Wiechert per determinarlo, ma la cosa diventa troppo complicata e spesso intrattabile. Per calcolare \vec{E}_a useremo invece l'espressione generale del potenziale di Lienard-Wiechert nel limite di grandi distanze.

4.2.1 Campo nella zona delle onde

Supponiamo di avere una quadricorrente $j^\mu(t, \vec{x})$ contenuta in una regione finita di spazio:

$$j^\mu(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{se } |\vec{x}| > \ell \forall t$$

Vogliamo studiare il campo per $|\vec{x}| := r \gg \ell$, detta *zona delle onde* (vedremo fra poco perché).

Il quadripotenziale relativo a j^μ è:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^\mu(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

Vale inoltre:

$$|\vec{x} - \vec{y}| = (|\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2)^{1/2} = |\vec{x}| \left(1 - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} + \frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2} \right)^{1/2}$$

Poiché consideriamo il caso $|\vec{y}| < \ell \ll |\vec{x}|$, il termine $|\vec{y}|^2/|\vec{x}|^2$ è trascurabile, e si può espandere in serie di Taylor:

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| \left(1 - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \right)^{1/2} \simeq |\vec{x}| \left(1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \right) + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

e dunque il quadripotenziale è²:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{4\pi r} \int j^\mu(t - r + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) d^3\vec{y} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (4.4)$$

I termini di ordine $1/r^2$ contribuirebbero solo ai campi di velocità, e dunque li trascuriamo in quanto siamo interessati ai soli campi di accelerazione; il termine $\vec{n} \cdot \vec{y}$ (detto *ritardo microscopico*), va invece tenuto perché in generale $t - r$ può essere arbitrariamente grande o piccolo; come vedremo, $\vec{n} \cdot \vec{y}$ si potrà trascurare solo se j^μ varia abbastanza lentamente.

Vorremmo dunque dimostrare che il quadripotenziale che abbiamo trovato nella (4.4) soddisfa le relazioni delle onde; è per questo che la zona a grandi distanze dal sistema di cariche in moto è detta *zona delle onde*.

Verifichiamo dunque che la (4.4) soddisfa le relazioni delle onde, in particolare $\partial_\mu A^\nu = n_\mu \dot{A}^\nu$, con $n^\mu = (1, \vec{n})$. L'unica componente non banale di quest'equazione è $\mu = i$ (l'altra è immediata); poiché inoltre vogliamo trascurare i termini di ordine $1/r^2$, l'unica derivata che contribuisce è $\partial_i r = x^i/r = n^i$. Dunque:

$$\partial_i A^\mu = -\frac{n^i}{4\pi r} \int \partial_0 j^\mu(t - r + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) d^3\vec{y} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) = -n^i \partial_0 A^\mu = -n^i \dot{A}^\mu = n_i \dot{A}^\mu \Rightarrow \partial_\mu A^\nu = n_\mu \dot{A}^\nu$$

Alla luce di questo e considerando che per la gauge di Lorenz si ha $\partial_\mu A^\mu = 0$, l'altra relazione delle onde, $n_\mu \dot{A}^\mu = 0$, è immediata:

$$n_\mu \dot{A}^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0$$

²Nel denominatore abbiamo sostituito solo $|\vec{x}|$, perché il resto contribuirebbe a termini di ordini superiori.

Ora, il fatto che A^μ così come definito nella (4.4) soddisfi le relazioni delle onde non implica che si comporti esattamente come delle onde piane: in realtà il campo nella zona delle onde è composto da onde “quasi” sferiche (il termine $\vec{n} \cdot \vec{y}$ rompe la simmetria sferica). Ovviamente, se si osserva una porzione abbastanza piccola di un’onda sferica a grandi distanze dalla sua sorgente, localmente la si può approssimare con un’onda piana.

Dunque, poiché A^μ soddisfa le relazioni delle onde, valgono tutte le considerazioni che abbiamo fatto per le onde piane (quelle, infatti, discendevano dalla sola validità delle relazioni delle onde, e non dalla particolare forma di quest’ultime). Sappiamo pertanto come sono fatti i campi elettromagnetici nella zona delle onde:

$$\vec{E} = \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{A}) - \vec{A} = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A})$$

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$$

Inoltre, il tensore energia-impulso è:

$$T_{\text{emg}}^{\mu\nu} = n^\mu n^\nu |\vec{E}|^2 = n^\mu n^\nu |\vec{n} \times \vec{A}|^2$$

Sappiamo inoltre che:

$$\frac{dP^\mu}{dt d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 T_{\text{emg}}^{i\mu} n^i = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 n^i n^\mu |\vec{E}|^2 n^i = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 n^\mu |\vec{n} \times \vec{A}|^2$$

con:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi r} \int \partial_0 \vec{j}(t - r + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) d^3 \vec{y}$$

Questa è la formula generale per determinare il quadrimomento irradiato da un sistema di cariche. Il problema è che l’integrale che definisce \vec{A} è molto complicato da calcolare per via della presenza del ritardo microscopico $\vec{n} \cdot \vec{y}$.

Vogliamo dunque cercare di sviluppare dei metodi approssimati per calcolare quest’integrale; il tipo di approssimazione che si può fare, in generale, dipende da quanto è “importante” il ritardo microscopico. Esistono due casi limite, che approfondiremo fra poco:

limite non relativistico: in questo caso ($v \ll c$) vedremo che $\vec{n} \cdot \vec{y}$ si può espandere in serie di Taylor, perché è molto piccolo; questo caso trova applicazioni ad esempio nell’irraggiamento atomico

limite ultra-relativistico: in questo caso ($v \sim c$) $\vec{n} \cdot \vec{y}$ è molto grande, e vedremo poi come semplificare il calcolo; questa situazione trova applicazioni ad esempio negli acceleratori di particelle

4.3 Sviluppo in multipoli

Cominciamo dal caso non relativistico.

Supponiamo che la corrente j^μ vari apprezzabilmente su scale di tempo dell’ordine di un dato T_0 , ossia $\Delta j^\mu \sim j^\mu$ se $\Delta t \sim T_0$. Se dunque $\vec{n} \cdot \vec{y}$ fosse piccolo rispetto a T_0 potremmo trascurarlo nella valutazione di j^μ ; ma quand’è che questo è vero?

Cerchiamo innanzitutto un modo per stimare T_0 .

Esempio: j^μ è la corrente generata da particelle cariche in moto con velocità \vec{v} contenute in una regione di spazio finita di dimensione ℓ .

In questo caso l’unica stima ragionevole di T_0 è:

$$T_0 = \frac{\ell}{v}$$

Per poter eseguire l’approssimazione non relativistica, dunque, abbiamo bisogno che $\vec{n} \cdot \vec{y} \ll T_0$. Poiché $|\vec{y}| < \ell$, ciò è verificato se $\ell \ll T_0 = \ell/v$, ossia se $v \ll 1$, che è proprio il caso non relativistico.

Esempio: j^μ è una corrente di lunghezza d’onda λ , ossia di periodo $T_0 = \lambda$, che è anche il tempo caratteristico. Pertanto, $\vec{n} \cdot \vec{y}$ è trascurabile se è piccolo rispetto a λ , e ciò è vero se $\ell \ll \lambda$, con ℓ dimensioni del sistema.

In casi come questi, dunque, si può espandere $\vec{n} \cdot \vec{y}$:

$$A^\mu(x) \approx \frac{1}{4\pi r} \int j^\mu(t-r, \vec{y}) d^3\vec{y} + \frac{1}{4\pi r} \int \vec{n} \cdot \vec{y} \partial_0 j^\mu(t-r, \vec{y}) d^3\vec{y} + O((\vec{n} \cdot \vec{y})^2)$$

o, reintroducendo le c :

$$A^\mu(x) \approx \frac{1}{4\pi r c} \int j^\mu\left(t - \frac{r}{c}, \vec{y}\right) d^3\vec{y} + \frac{1}{4\pi r c^2} \int \vec{n} \cdot \vec{y} \partial_0 j^\mu\left(t - \frac{r}{c}, \vec{y}\right) d^3\vec{y} + O\left(\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}\right)^2\right)$$

I termini di questo sviluppo si dicono *multipoli*, e il tipo di approssimazione prende un nome diverso in base a quali termini si trascurano e quali no.

4.3.1 Approssimazione di dipolo

L'*approssimazione di dipolo* corrisponde a tenere solo il primo termine nell'approssimazione di A^μ , e considerare solo i termini spaziali:

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{4\pi r} \int \vec{j}(t-r, \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (4.5)$$

Infatti, se volessimo valutare il termine relativo alla componente temporale di A^μ , tenendo conto che $j^0 = c\rho$:

$$A^0(x) = \frac{1}{4\pi r c} \underbrace{\int \rho\left(t - \frac{r}{c}, \vec{y}\right) d^3\vec{y}}_{=Q(t-\frac{r}{c})} + \frac{1}{4\pi r c^2} \int \vec{n} \cdot \vec{y} \partial_0 \rho\left(t - \frac{r}{c}, \vec{y}\right) d^3\vec{y}$$

ove Q è la carica elettrica totale. Questa non è una vera e propria approssimazione di dipolo, in quanto è presente anche un termine di ordine $1/c^2$.

Ora, per *dipolo elettrico* si intendono due cariche $+q$ e $-q$ tenute a una distanza fissa d fra loro; il *momento di dipolo* è definito come:

$$\vec{D} = dq\hat{d}$$

con \hat{d} versore diretto come la congiungete le due cariche.

Con una distribuzione generica di cariche, invece:

$$D^i(t) = \int y^i \rho(t, \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (4.6)$$

e si ricade nel caso precedente se l'origine delle coordinate è posta a metà fra le due cariche, e ρ è la somma di due δ , una per $+q$ e una per $-q$.

A prima vista, dunque, sembrerebbe che la (4.5) sia riconducibile alla (4.6) (il secondo integrale che compare in A^0 è invece esattamente $\vec{n} \cdot \vec{D}$). Prendiamo dunque la derivata temporale della (4.6), tenendo conto che $\partial_0 \rho = -\partial_i j^i$ per la continuità della corrente:

$$\dot{D}^i(t) = \int y^i \partial_0 \rho(t, \vec{y}) d^3\vec{y} = \int y^i (-\partial_k j^k) d^3\vec{y} = - \int y^i \partial_k j^k d^3\vec{y} = \int (\partial_k y^i) j^k d^3\vec{y} - \int \partial_k (y^i j^k) d^3\vec{y}$$

il secondo integrale, sfruttando il teorema di Gauss, è nullo perché la corrente si annulla all'infinito. Dunque:

$$\dot{D}^i(t) = \int \delta_k^i j^k d^3\vec{y} = \int j^i d^3\vec{y}$$

Pertanto:

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{4\pi r} \vec{D}(t-r)$$

L'espressione esplicita dei *campi di dipolo*, dunque, è:

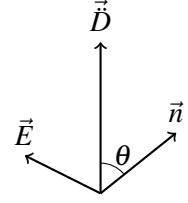
$$\vec{E}(t-r) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}) = \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \frac{1}{4\pi r} \vec{D}(t-r) \right) = \frac{1}{4\pi r} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{D}(t-r)) = \frac{1}{4\pi r} [\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{D}(t-r)) - \vec{D}(t-r)]$$

$$\vec{B}(t-r) = \vec{n} \times \vec{E} = -\frac{1}{4\pi r} \vec{n} \times \vec{D}$$

Pertanto, \vec{E} appartiene al piano individuato da \vec{D} e \vec{n} , ed è ortogonale a quest'ultimo.

Detto quindi θ l'angolo fra \vec{n} e \vec{D} , la potenza irradiata è:

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 |\vec{E}|^2 = \frac{1}{16\pi^2} |\vec{n} \times \vec{D}|^2 = \frac{1}{16\pi^2} |\vec{D}|^2 \sin^2 \theta$$



Il fatto che $dW/d\Omega \propto \sin^2 \theta$ è tipico dell'approssimazione di dipolo.

La potenza emessa massima si ha dunque per $\theta = \pi/2$, ossia in direzione perpendicolare al dipolo, mentre è nulla per $\theta = 0$, ossia nella direzione del dipolo.

Per determinare la potenza totale emessa, tenendo conto che $d\Omega = d\varphi d\cos\theta$:

$$W = \int \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi}{16\pi^2} |\vec{D}|^2 \underbrace{\int_{-1}^1 \sin^2 \theta d\cos\theta}_{=4/3} = \frac{1}{6\pi} |\vec{D}|^2 \Rightarrow W = \frac{1}{6\pi} |\vec{D}|^2$$

Un'altra caratteristica importante dell'approssimazione di dipolo è che la quantità di moto totale emessa è nulla. Infatti, si ha³:

$$\frac{dP^i}{dt d\Omega} = n^i \frac{dW}{d\Omega} \Rightarrow \frac{dP^i}{dt} = \int n^i \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \int n^i \frac{1}{16\pi^2} |\vec{n} \times \vec{D}|^2 d\Omega$$

Ora, $dW/d\Omega$ è una funzione pari di \vec{n} (il che è un'altra caratteristica dell'approssimazione di dipolo), dunque $\vec{n} dW/d\Omega$ è dispari in \vec{n} , e quindi l'integrale è nullo perché esteso a un dominio pari. Quindi:

$$\frac{dP^i}{dt} = 0$$

Esempio: Sistema di cariche in moto. In questo caso:

$$\rho(t, \vec{y}) = \sum_r e_r \delta(\vec{y} - \vec{y}_r(t)) \Rightarrow \vec{D}(t) = \sum_r e_r \vec{y}_r(t) \Rightarrow \vec{D}(t) = \sum_r e_r \vec{a}_r(t)$$

Dunque:

$$W = \frac{1}{6\pi} \left| \sum_r e_r \vec{a}_r \right|^2$$

Nel caso in cui ci sia una sola particella:

$$W = \frac{1}{6\pi} e^2 |\vec{a}|^2$$

nota come *formula di Larmor*.

Da notare che i campi sono lineari, mentre la potenza no: il campo totale di un sistema di cariche è la somma dei campi delle singole particelle, mentre ciò non accade per la potenza emessa.

Ci sono alcuni casi nei quali, in approssimazione di dipolo, la potenza totale emessa è nulla, e dunque non c'è irraggiamento.

Esempi:

- Un sistema isolato di particelle identiche; in realtà basta molto meno, ossia che il rapporto carica/massa sia lo stesso per tutte le particelle, ossia $e_r/m_r = e/m \forall r$. Infatti in questo caso:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \sum_r e_r \vec{y}_r = \sum_r m_r \frac{e_r}{m_r} \vec{y}_r = \sum_r m_r \frac{e}{m} \vec{y}_r = \frac{e}{m} \sum_r m_r \vec{y}_r = \frac{e}{m} \vec{y}_{\text{cdm}} M_{TOT} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{D} = \frac{e}{m} M_{TOT} \vec{y}_{\text{cdm}} \Rightarrow \vec{D} = \frac{e}{m} M_{TOT} \vec{y}_{\text{cdm}} = 0 \end{aligned}$$

e $M_{TOT} \vec{y}_{\text{cdm}} = 0$ per via del fatto che il sistema è isolato.

³Quest'espressione di $\frac{dP^i}{dt d\Omega}$ la si ottiene inserendo la (4.3) nell'espressione del tensore energia-impulso nella zona delle onde.

- Distribuzioni sferiche di carica. In questo caso, infatti:

$$\rho(t, \vec{y}) = \rho(t, |\vec{y}|) \quad D^i = \int y^i \rho(t, |\vec{y}|) d^3\vec{y} = 0$$

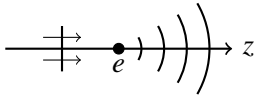
ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che ρ è pari in \vec{y} , dunque $\vec{y}\rho(t, |\vec{y}|)$ è dispari in \vec{y} , e l'integrale è esteso a un dominio pari. Dunque:

$$\frac{dW}{d\Omega} = 0$$

In realtà, per distribuzioni sferiche di carica non c'è irraggiamento in nessun ordine dello sviluppo in multipoli; ciò lo si può verificare calcolando i momenti di dipolo di ordine superiore (vedremo poi cosa sono), oppure sfruttando il teorema di Birkhoff.

4.4 Diffusione (o scattering) Thomson

È un processo fisico importante in molte situazioni, che poi analizzeremo. Si tratta di emissione di radiazione da parte di particelle cariche.



Consideriamo una particella carica libera, che a un certo istante viene investita da un'onda elettromagnetica che si propaga lungo l'asse z , che per semplicità supporremo piana monocromatica e polarizzata linearmente.

Quando l'onda incide sulla particella, questa verrà accelerata nella direzione del campo elettromagnetico, emettendo radiazione. Vogliamo determinare l'energia emessa dalla particella in funzione della direzione, cioè dell'angolo rispetto all'asse z .

In processi di diffusione come questo è utile descrivere il sistema attraverso la *sezione d'urto* (differenziale):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{dW}{d\Omega}$$

(il termine “sezione” è dovuto al fatto che ha le dimensioni di un'area) ove I_0 è il flusso di energia incidente, ossia l'energia per unità di tempo e superficie dell'onda incidente.

Cominciamo calcolando I_0 . Poiché l'onda è piana e polarizzata linearmente:

$$\vec{E}_{\text{in}} = \vec{E}_0 \cos(\omega(t - z)) \quad \vec{B}_{\text{in}} = \hat{z} \times \vec{E}_{\text{in}}$$

Per calcolare il flusso incidente, prendiamo la media temporale⁴ di $|\vec{S}|$:

$$I_0 = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \langle |\vec{E}_0 \cos(\omega(t - z))|^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$$

Passiamo dunque al calcolo di $dW/d\Omega$. Assumiamo innanzitutto che la velocità v della particella, quando viene messa in moto, sia molto minore della velocità della luce, ossia $v \ll 1$ (vedremo poi quali sono le condizioni quantitative per soddisfare quest'ipotesi). Possiamo dunque valutare $dW/d\Omega$ usando l'approssimazione di dipolo, e quindi dobbiamo innanzitutto determinare il momento di dipolo della particella una volta messa in moto. Si ha:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{y}(t) = e \left(\vec{E}_{\text{in}} + \vec{v} \times \vec{B}_{\text{in}} \right)$$

Poiché $|\vec{E}_{\text{in}}| = |\vec{B}_{\text{in}}|$ e $v \ll 1$, il termine relativo al campo magnetico è trascurabile. Dunque:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{y}(t) = e \vec{E}_{\text{in}}(t, \vec{y}(t)) \simeq e \vec{E}_{\text{in}}(t, 0)$$

ove l'ultima approssimazione vale per due motivi:

4

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

1. Poiché $v \ll 1$, la variazione della posizione della particella una volta messa in moto non è rilevante
2. Poiché $\vec{E}, \vec{B} \perp z$, la particella si muove solo in direzione ortogonale a z , mentre i campi dipendono solo dalla coordinata z

Quindi:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{y}(t) = e \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \vec{y}(t) = -\frac{e}{m\omega^2} \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

e poiché:

$$\vec{v}(t) = \frac{e}{m\omega} \vec{E}_0 \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_{\max}| = \frac{e}{m\omega} |\vec{E}_0|$$

allora la condizione $v \ll 1$ è soddisfatta quando:

$$|\vec{E}_0| \ll \frac{m\omega}{e} \quad \Rightarrow \quad I_0 \ll \frac{m^2 \omega^2}{2e^2}$$

Notiamo inoltre che in quest'approssimazione:

$$|\vec{y}_{\max}| = \frac{e}{m\omega^2} |\vec{E}_0| \ll \lambda = \frac{2\pi}{\omega}$$

ove λ è la lunghezza d'onda della radiazione.

Pertanto, l'approssimazione non relativistica vale o per campi sufficientemente poco intensi o per frequenze abbastanza basse.

Dunque, si ha:

$$\vec{D}(t) = e \vec{y}(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{D}}(t) = e \ddot{\vec{y}}(t) = e^2 \frac{\vec{E}_0}{m} \cos(\omega t)$$

Detti quindi \vec{E} e \vec{B} i campi emessi dalla particella:

$$\vec{E}(t, r) = -\frac{1}{4\pi r} \left[\ddot{\vec{D}} - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{D}}) \vec{n} \right] = -\frac{e^2}{4\pi m r} \left[\vec{E}_0 - (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) \vec{n} \right] \cos(\omega(t-z)) \quad (4.7)$$

$$\vec{B}(t, r) = \vec{n} \times \vec{E}(t, r)$$

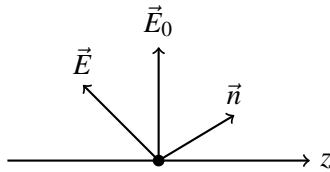
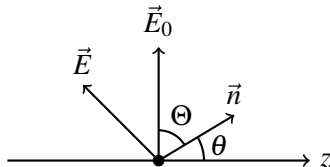


Figura 4.4: Situazione considerata

Pertanto la potenza emessa dalla particella (o meglio la sua media temporale) è:

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = r^2 \left\langle |\vec{E}|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{e^4}{16\pi^2 m^2} \left[|\vec{E}_0|^2 - (\vec{n} \cdot \vec{E}_0)^2 \right]$$

Con la seguente convenzione sugli angoli:



si ha:

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} |\vec{E}_0|^2 \sin^2 \Theta \quad (4.8)$$

(da notare che anche stavolta c'è una dipendenza della potenza emessa da $\sin^2 \Theta$, come avevamo già detto). Notiamo anche che, poiché \vec{E}_0 è polarizzato linearmente, anche \vec{E} lo è; inoltre, nelle nostre approssimazioni la frequenza dell'onda emessa è uguale a quella dell'onda incidente (lo si vede dalla (4.7)). In generale, però, questo non è vero.

Dalla (4.8) vediamo anche che le particelle più leggere sono anche quelle che emettono più efficacemente; per questo motivo, ad esempio, in un plasma si può trascurare la radiazione emessa dai protoni (in quanto circa 2000 volte più pesanti degli elettroni) e considerare solo quella dovuta agli elettroni.

Possiamo anche generalizzare questa situazione al caso in cui la radiazione incidente *non* sia polarizzata. Consideriamo dunque un'onda incidente non polarizzata, ossia tale che la direzione di \vec{E}_0 nel piano ortogonale all'asse \vec{z} è del tutto arbitraria (la sua distribuzione di probabilità rispetto all'angolo azimutale è costante). Per determinare i risultati precedenti in questa situazione dobbiamo mediare su \vec{E}_0 . Indicando con $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ la media sulle direzioni, si ha:

$$\begin{aligned} \langle\langle E_{0,x} \rangle\rangle &= \langle\langle E_{0,y} \rangle\rangle = 0 & \langle\langle E_{0,x}^2 \rangle\rangle &= \langle\langle E_{0,y}^2 \rangle\rangle = \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2 \\ \langle\langle E_{0,x} E_{0,y} \rangle\rangle &= 0 \end{aligned}$$

(ove l'ultima relazione è dovuta al fatto che $E_{0,x} E_{0,y}$ è una funzione dispari in x e y).

Dunque, per determinare $dW/d\Omega$ in questa situazione dobbiamo calcolare $\langle\langle (\vec{n} \cdot \vec{E}_0)^2 \rangle\rangle$:

$$\langle\langle (\vec{n} \cdot \vec{E}_0)^2 \rangle\rangle = n_x^2 \langle\langle E_{0,x}^2 \rangle\rangle + n_y^2 \langle\langle E_{0,y}^2 \rangle\rangle + 2n_x n_y \langle\langle E_{0,x} E_{0,y} \rangle\rangle = \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2 (n_x^2 + n_y^2) = \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2 \sin^2 \theta$$

(infatti stavolta l'angolo Θ perde di significato perché \vec{E}_0 non ha più direzione definita).

Dunque (np sta per "non polarizzata"):

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle_{np} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} |\vec{E}_0|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = \frac{e^4}{64\pi^2 m^2} |\vec{E}_0|^2 (1 + \cos^2 \theta)$$

In questo caso, $\langle dW/d\Omega \rangle_{np}$ è massima per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, ossia la potenza emessa è massima lungo l'asse z (situazione opposta a quella di prima, dove la potenza emessa è massima in direzione ortogonale a z). Dunque:

$$\frac{d\sigma_{np}}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{dW_{np}}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta) = r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$$

ove (reintroducendo c):

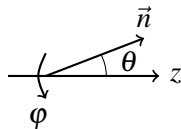
$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi m c^2}$$

è detto il *raggio classico* della particella (per l'elettrone, ad esempio, $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-13}$ cm), e ci permette di capire il significato fisico della sezione d'urto differenziale.

Infatti, $d\sigma/d\Omega \propto r_0^2$, e dunque ai fini dell'interazione elettromagnetica è come se la particella "occupasse" una superficie di area r_0^2 . Per comprendere meglio quest'ultimo concetto, calcoliamo la *sezione d'urto totale*⁵:

$$\sigma_{np} = \int \frac{d\sigma_{np}}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d\sigma_{np}}{d\Omega} d\cos\theta = 2\pi \int_{-1}^1 r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} d\cos\theta = 2\pi r_0^2 \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

⁵Dopo la seconda uguaglianza si sono prese coordinate polari rispetto all'asse z :



e dunque anche la sezione d'urto totale è proporzionale al quadrato del raggio classico della particella. Ora, in generale la sezione d'urto totale è:

$$\sigma_{TOT} = \frac{W_{TOT}}{I_0} \Rightarrow W_{TOT} = \sigma_{TOT} I_0 \quad (4.9)$$

Questa formula ha un'interpretazione intuitiva abbastanza evidente:

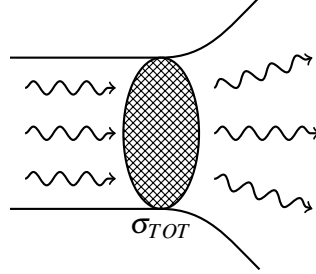


Figura 4.5: Significato di σ_{TOT}

$I_0 \sigma_{TOT}$ è l'energia per unità di tempo che fluisce attraverso l'area σ_{TOT} . Dalla (4.9) si deduce che tutta questa potenza viene diffusa; pertanto, la diffusione Thomson può essere interpretata in questo modo: tutta la radiazione presente nel cilindro di base σ_{TOT} interagisce con la particella e viene diffusa, mentre il resto passa inalterato; insomma, σ_{TOT} è la dimensione effettiva del “bersaglio”.

Vediamo un po' di applicazioni di questo fenomeno:

1. Nel Sole, una volta che un fotone⁶ viene creato in una reazione nucleare, viene continuamente scatterato all'interno del Sole stesso, prima di poter uscire nello spazio aperto. Poiché la materia all'interno del Sole si trova allo stato di plasma (ossia gli atomi sono scissi in nuclei ed elettroni liberi), vogliamo dunque calcolare il cammino libero medio ℓ di un fotone in un plasma.

Possiamo dunque pensare che il fotone si “porti dietro” un “dischetto” di area σ_T : se un elettrone vi passa attraverso il fotone viene diffuso, altrimenti no. Equivalentemente, se in media in un cilindro di base σ_T e altezza ℓ c'è un elettrone, allora il fotone viene scatterato. Detto n_ℓ il numero di elettroni per unità di volume, la condizione che definisce il cammino libero medio è:

$$n_\ell \sigma_T \ell \simeq 1 \Rightarrow \ell \simeq \frac{1}{n_\ell \sigma_T}$$

Nel Sole, $n_\ell = 10^{30} \text{ m}^{-3}$ (è una densità simile a quella dell'acqua), e utilizzando la σ_T dell'elettrone risulta $\ell \simeq 1 \text{ cm}$. Tenendo conto del fatto che il raggio solare è $R_\odot \simeq 10^9 \text{ m}$, si può stimare che un fotone impiega qualche migliaio di anni prima di uscire dal Sole.

2. Altra applicazione risiede nello studio dell'universo primordiale.

Inizialmente l'universo era abbastanza caldo da impedire la formazione di atomi (tutta la materia era plasma), e dunque era anche “opaco” rispetto alla radiazione, perché i fotoni potevano essere diffusi con molta facilità. A un certo punto la temperatura si è abbassata a sufficienza per permettere la creazione di atomi: pertanto l'universo è diventato “trasparente” alla radiazione e i fotoni hanno smesso di essere scatterati. Ciò ha dato origine alla CMB (cosmic microwave background, radiazione cosmica di fondo): da quell'istante la radiazione ha cominciato a viaggiare liberamente, e tutt'oggi la possiamo vedere (si tratta di una sorta di “fotografia istantanea” dell'universo in quel momento).

3. Se l'elettrone invece di essere libero è legato ad un atomo si ha lo *scattering Rayleigh*; il conto in questo caso è identico a quello che abbiamo fatto, con la differenza che ora va inclusa una forza di tipo elastico che lega l'elettrone al nucleo. Risulta che:

$$\sigma_R \propto \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

⁶In questo paragrafo parliamo di fotoni, che non abbiamo ancora mai visto, ma ovviamente intendiamo radiazione elettromagnetica

ove ω è la frequenza della radiazione incidente (che è uguale a quella emessa), e ω_0 è la frequenza di oscillazione caratteristica del sistema nucleo-elettrone.

In questo caso, dunque, la sezione d'urto dipende dalla frequenza:

$\omega \gg \omega_0$: ci si riconduce alla situazione dello scattering Thomson

$\omega \ll \omega_0$: si ha:

$$\sigma_R \propto \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \ll 1$$

ossia, particelle non libere diffondono molto meno efficacemente di quelle libere, a piccole frequenze

$\omega \sim \omega_0$: in questo caso, detto *risonante*, la radiazione emessa è piccata su ω_0 (in realtà il valore della sezione d'urto non diverge, come potrebbe sembrare dalla sua espressione)

Torniamo allo scattering Thomson.

Abbiamo trascurato una cosa: non abbiamo considerato l'effetto della radiazione emessa dalla particella sulla particella stessa. È la *reazione di radiazione*, che vedremo alla fine del corso. Possiamo però renderci conto che questo effetto c'è tramite la verifica di alcune leggi di conservazione:

Energia: $W = \sigma I_0$, pertanto l'energia della radiazione incidente è uguale a quella della radiazione emessa. L'energia è pertanto conservata.

Quantità di moto: Si ha un certo flusso di quantità di moto incidente, dovuto alla radiazione, che è uguale al flusso di energia:

$$\frac{dP_z^{(in)}}{dt} = \sigma I_0$$

Tuttavia:

$$\frac{dP_z^{(out)}}{dt} = 0$$

perché siamo in approssimazione di dipolo (in questo caso, come abbiamo già mostrato, non c'è emissione di quantità di moto). D'altra parte, però, la particella mantiene in media la sua quantità di moto, dunque non ne assorbe: c'è quindi della quantità di moto incidente ma non ce n'è di emessa.

Ciò è proprio dovuto al fatto che ci siamo “dimenticati” dell'effetto dei campi diffusi sulla particella stessa: pertanto, su di essa dovrà agire una forza F_z tale che:

$$F_z = \frac{dP_z^{(in)}}{dt} = \sigma I_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^2 |\vec{E}_0|^2$$

e questa forza va proprio interpretata come quella esercitata sulla particella dai campi emessi dalla particella stessa (d'altronde non c'è nessun altro agente fisico al quale la si potrebbe associare).

Questa “dimenticanza”, però, non inficia sulla validità dei conti che abbiamo fatto perché $F_z \propto |\vec{E}_0|^2$, e abbiamo supposto che i campi siano poco intensi (altrimenti non sarebbe soddisfatta la condizione $v \ll 1$), e dunque F_z è trascurabile.

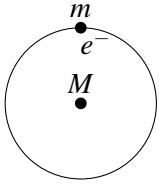
Precisiamo infine un'ultima cosa: nella discussione che abbiamo fatto sullo scattering Thomson abbiamo supposto che il campo elettromagnetico sia “classico”, ossia non quantistico: quest'approssimazione è valida se la frequenza ω della radiazione incidente è molto piccola, di modo che l'energia $\hbar\omega$ dei fotoni sia piccola rispetto alla massa della particella. Se dunque $\hbar \ll mc^2$ vale lo scattering Thomson come l'abbiamo visto; se invece $\hbar\omega \sim mc^2$, la diffusione di radiazione da parte di una particella carica è descritta dallo scattering Compton (nel quale la diffusione è descritta come un urto fra due particelle), nel quale la frequenza della radiazione diffusa differisce da quella incidente.

4.4.1 L'atomo di idrogeno

Vediamo ora un'importante applicazione dello scattering Thomson.

Consideriamo un atomo di idrogeno, composto dunque da un protone e un elettrone che gli orbita intorno. Sappiamo che, classicamente, particelle accelerate irradiano, e dunque ci aspetteremmo che gli elettroni, all'interno dell'atomo, siano instabili e emettano radiazione. Vogliamo studiare proprio questa emissione, detta *Bremsstrahlung* (non relativistica): si tratta della radiazione emessa quando due particelle interagiscono attraverso la forza coulombiana.

Si possono distinguere dunque due casi: quello in cui le orbite delle particelle sono aperte (come in un urto contro un bersaglio) e quello in cui sono chiuse (come l'elettrone in un atomo). Come abbiamo detto, il caso fisicamente più interessante è il secondo, e dunque ci occupiamo di questo.



Consideriamo quindi l'atomo di idrogeno nello stato fondamentale; allora si può considerare il protone fermo nel sistema di riferimento del laboratorio (dal momento che è molto più pesante dell'elettrone) e l'elettrone in orbita attorno ad esso lungo traiettorie circolari.

Il raggio di quest'orbita è il *raggio di Bohr*:

$$r_B = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} \approx 5.3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

Se a questo sistema fossero applicabili i principi della meccanica classica⁷, essendo accelerato l'elettrone dovrebbe emettere.

L'equazione del moto dell'elettrone è:

$$m\omega^2 r_B = \frac{\alpha}{r_B^2} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\alpha}{mr_B^3} = \frac{r_0}{r_B^3}$$

ove $r_0 = e^2/4\pi m \approx 28 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ è il raggio classico dell'elettrone. Dunque:

$$v = \omega r_B = \sqrt{\frac{r_0}{r_B}} \ll 1$$

(perché $r_0 \ll r_B$), e pertanto la potenza emessa dall'elettrone è (usiamo la formula di Larmor):

$$W = \frac{e^2}{6\pi} a^2 = \frac{e^2}{6\pi} \frac{\alpha^2}{m^2 r_B^4}$$

Quindi, l'energia emessa in un periodo $T = 2\pi/\omega$ di rotazione è:

$$\Delta\mathcal{E} = \int_0^T W dt = WT$$

Detta ora \mathcal{E} l'energia iniziale posseduta dall'elettrone, allora:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 r_B^2 - \frac{\alpha}{r_B} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{r_B}$$

e inoltre:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{|\mathcal{E}|} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{e^2}{6\pi} \frac{\alpha^2}{m^2 r_B^4} \frac{2r_B}{\alpha} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{r_0}{r_B} \right)^{3/2} \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

L'elettrone, dunque, perde pochissima energia ad ogni giro, e il fatto che la variazione percentuale dell'energia per giro $\Delta\mathcal{E}/|\mathcal{E}|$ sia piccolissima giustifica a posteriori la validità della nostra approssimazione.

Ora, però, il periodo di rotazione dell'elettrone è $T \approx 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$; nella nostra approssimazione (che è la più "cruda" possibile), dunque, in circa $\delta t \approx 10^{-10} \text{ s}$ l'elettrone perde tutta la sua energia, collassando sul protone.

⁷Nota: per "classica" si intende "non quantistica"; per "meccanica classica" intendiamo dunque anche quella relativistica.

Se dunque la meccanica classica fosse applicabile a questo sistema fisico, gli atomi collasserebbero e la materia non potrebbe esistere.

Inoltre, l'elettrone dovrebbe emettere con frequenza ω , perché il moto dell'elettrone è armonico semplice; infatti $\vec{E} \propto \vec{D}$, e \vec{D} ha la stessa frequenza del moto dell'elettrone. Pertanto, dovrebbe essere emessa la sola frequenza ω , ma in realtà ciò è vero solo in approssimazione di dipolo.

Volendo "raffinare" questo modello, si può tener conto del fatto che in realtà il raggio varia col tempo ($\mathcal{E}(t) = -\alpha/(2r(t))$); in questo caso si avrebbe, dunque:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

(ossia, la variazione percentuale del raggio è opposta a quella dell'energia), e poiché $d\mathcal{E}/dt = -W$:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\mathcal{E}} W = -\frac{2r}{\alpha} \frac{2}{3} \frac{\alpha^3}{m^2 r^4} = -\frac{4}{3} \frac{r_0^2}{r^3} \Rightarrow r^3(t) = r_B^3 - 4r_0^2 t$$

Se stimiamo il tempo \bar{t} al quale $r^3(\bar{t}) = 0$, risulta $\bar{t} \approx 10^{-11}$ s, in accordo con quanto visto prima.

In realtà anche in questo caso abbiamo tralasciato il fatto che via via che il raggio diminuisce, la velocità dell'elettrone aumenta, e ad un certo punto diventano importanti gli effetti relativistici. Volendo, quindi, si potrebbe apportare anche questa correzione, ma il risultato non cambia di molto.

4.5 Approssimazione di quadrupolo

Vogliamo ora capire come "migliorare" l'approssimazione di dipolo.

Ci fermeremo solo ai termini immediatamente successivi, detti di *quadrupolo elettrico* e di *dipolo magnetico*. Partiamo dunque dall'espressione di A^μ nella zona delle onde (reintroduciamo le c):

$$A^i = \frac{1}{4\pi r c} \int j^i \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}; \vec{y} \right) d^3 \vec{y} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Dunque, sviluppando il ritardo microscopico in serie di Taylor, arrestandoci ai termini quadratici:

$$A^i = \frac{1}{4\pi r c} \left[\dot{D}^i + \int \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c} \partial_0 j^i \left(t - \frac{r}{c}; \vec{y} \right) d^3 \vec{y} + o\left(\frac{1}{c^2}\right) \right] = \frac{1}{4\pi r c} \left[\dot{D}^i + \frac{n^k}{c} \partial_0 \int y^k j^i \left(t - \frac{r}{c}; \vec{y} \right) d^3 \vec{y} \right]$$

È conveniente scrivere l'integrale fra parentesi come somma di un termine simmetrico e di uno antisimmetrico:

$$\int y^k j^i d^3 \vec{y} = \frac{1}{2} \int (y^k j^i + y^i j^k) d^3 \vec{y} + \frac{1}{2} \int (y^k j^i - y^i j^k) d^3 \vec{y}$$

Il primo addendo è un termine detto di *quadrupolo elettrico*, mentre il secondo di *dipolo magnetico*. Consideriamoli separatamente.

Il *tensore di dipolo magnetico* è definito come:

$$M^{ik} = \frac{1}{2} \int (y^i j^k - y^k j^i) d^3 \vec{y}$$

(è l'opposto del secondo addendo dell'integrale in A^i); si tratta di un tensore antisimmetrico tridimensionale, dunque ad esso è associato il vettore tridimensionale M^ℓ definito come:

$$M^{ik} = \epsilon^{ik\ell} M^\ell \Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{2} \int \vec{y} \times \vec{j} d^3 \vec{y}$$

detto *dipolo magnetico*, in quanto è definito in modo analogo al dipolo elettrico (con \vec{j} al posto di ρ e il prodotto vettore al posto di quello scalare); si tratta del momento di dipolo magnetico che abbiamo visto in Fisica 2.

Se invece di una distribuzione continua di carica si considera una particella carica in moto, si ha:

$$\vec{M} = \frac{e}{2} \vec{y} \times \vec{v}$$

Il *quadrupolo elettrico* è invece definito come:

$$D^{ij} = \int y^i y^j \rho(t, \vec{y}) d^3 \vec{y}$$

(che è ovviamente un tensore simmetrico). Si ha allora, sfruttando l'equazione di continuità della carica:

$$\dot{D}^{ij} = \int y^i y^j \partial_0 \rho(t, \vec{y}) d^3 \vec{y} = - \int y^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k} j^k d^3 \vec{y}$$

Integrando per parti, uno dei due termini si annulla grazie al teorema di Gauss e al fatto che la quadricorrente si annulla all'infinito. Si ha quindi:

$$\dot{D}^{ij} = \int (y^j j^i + y^i j^j) d^3 \vec{y}$$

e pertanto:

$$\frac{1}{2} \int (y^k j^i + y^i j^k) d^3 \vec{y} = \frac{1}{2} \dot{D}^{ik}$$

Il quadripotenziale nella zona delle onde può dunque essere espresso come:

$$A^i = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{1}{c} \dot{D}^i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \ddot{D}^{ik} - \dot{M}^{ik} \right) n^k + o \left(\frac{1}{c^3} \right) \right] \quad (4.10)$$

Per il teorema di Birkhoff, se il campo ha simmetria sferica si dovrebbe avere che A^i è un quadripotenziale di tipo coulombiano, e dunque i termini contenenti \dot{M}^{ik} e \ddot{D}^{ik} dovrebbero essere nulli. Infatti, nell'ipotesi che i campi abbiano simmetria sferica si ha $j^i(t, \vec{y}) = j^i(t, |\vec{y}|)$ e quindi $M^{ij} = 0$ (è l'integrale di una funzione dispari su un dominio pari); dalla definizione di quadrupolo elettrico, invece, non emerge evidentemente che esso è nullo per una distribuzione sferica di carica. In generale, dunque, $D^{ij} \neq 0$, ma si tratta solo di un effetto di gauge (ossia, la gauge che stiamo usando non è la più "furba" possibile). Infatti, sotto la trasformazione:

$$A^i \longrightarrow A^i - \partial^i \left(\frac{1}{8\pi r c} \frac{1}{3} \dot{D}^{jj} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

il quadripotenziale diventa, trascurando i termini di ordine $1/r^2$:

$$A'^i = A^i - \frac{1}{8\pi r c^2} \frac{n^i}{3} \ddot{D}^{jj} \left(t - \frac{r}{c} \right) + o \left(\frac{1}{r^2} \right)$$

Questa trasformazione di gauge è quindi equivalente alla trasformazione:

$$D^{ij} \longrightarrow D'^{ij} = \int \left(y^i y^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} |\vec{y}|^2 \right) \rho \left(t - \frac{r}{c}, \vec{y} \right) d^3 \vec{y}$$

(ove D' è detto *momento di quadrupolo ridotto*), di modo che la (4.10) diventa:

$$A^i = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{1}{c} \dot{D}^i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \ddot{D}^{ik} - \dot{M}^{ik} \right) n^k + o \left(\frac{1}{c^3} \right) \right]$$

Se ora la distribuzione di carica è a simmetria sferica, passando a coordinate polari si ha $d^3 \vec{y} = |\vec{y}|^2 d|\vec{y}| d\Omega$, $y^i = |\vec{y}| n^i$. Dunque:

$$D'^{ij} = \int |\vec{y}|^2 |\vec{y}|^2 \rho \left(t - \frac{r}{c}, |\vec{y}| \right) d|\vec{y}| \int \left(n^i n^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} \right) d\Omega$$

L'ultimo integrale, però, è nullo; infatti, si deve avere⁸ $\int n^i n^j d\Omega = k \delta^{ij}$, e $\int n^i n^i d\Omega = 4\pi = k \delta^{ii} = 3k$, dunque $k = 4\pi/3$. Pertanto:

$$\int n^i n^j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij} \quad \int \frac{1}{3} \delta^{ij} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij}$$

Dunque, $D'^{ij} = 0$.

⁸ Infatti, se $i = j$ allora $n^i n^j = n^i n^i = 1$, altrimenti $n^i n^j = 0$.

Studiamo dunque l'emissione di questa distribuzione sferica di carica. In approssimazione di dipolo si ha:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{r^2}{c} |\vec{n} \times \vec{\dot{A}}|^2 = \frac{r^2}{c} (\delta^{ij} - n^i n^j) \dot{A}^i \dot{A}^j$$

(notiamo che il termine $\delta^{ij} - n^i n^j$ è quello che determina la dipendenza della potenza emessa da $\sin^2 \theta$).

Nel caso dell'approssimazione di quadrupolo, invece, per studiare la dipendenza della potenza irradiata bisogna considerare anche che A^i stesso dipende da n^k ; possiamo soltanto dire, dunque, che in approssimazione di quadrupolo la dipendenza dalla direzione della potenza irradiata è più complicata di $\sin^2 \theta$.

Per determinare inoltre le frequenze emesse, notiamo che la relazione che lega il momento di quadrupolo a \vec{y} per una particella in moto è più complicata che in approssimazione di dipolo. Si ha infatti:

$$D^{ij} = e(y^i y^j - \delta^{ij} |\vec{y}|^2)$$

che è quadratico in y (e non lineare come nel caso $D^i = ey^i$), e analogamente per il dipolo magnetico M^{ik} . Pertanto, se ad esempio il moto della particella è armonico semplice di frequenza ω , la radiazione emessa in approssimazione di quadrupolo elettrico e di dipolo magnetico contiene anche frequenze multiple di ω . In generale, più ci si avvicina, nelle approssimazioni, a velocità relativistiche, più è grande la frequenza emessa (sempre come multiplo di ω).

Notiamo poi che $dW/d\Omega$ è quadratico in \dot{A} , dunque in approssimazione di quadrupolo dovremmo anche considerare i termini di ordine $1/c^3$, perché nell'eseguire il quadrato di \dot{A} ci sono dei termini di ordine $1/c^4$ che provengono dal prodotto di \ddot{D}^i/c con i termini di ordine $1/c^3$. Pertanto, per consistenza, supponiamo che i termini di ordine $1/c$, ossia i termini di dipolo, siano nulli.

Per calcolare la potenza totale emessa si procede come al solito. Saltiamo il conto perché è lungo e noioso; risulta:

$$W = \int \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{6\pi} |\ddot{\vec{M}}|^2 + \frac{1}{80\pi} \dot{D}^{ij} \dot{D}^{ij}$$

4.6 Irraggiamento ultrarelativistico

Vogliamo ora studiare l'emissione di quadrimomento nel caso ultrarelativistico, e cerchiamo di farlo col minor sforzo possibile (ossia senza fare troppi conti).

Sappiamo che per una singola particella con $v \ll 1$ valgono le formule di Larmor:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi} |\vec{a}(t-r)|^2 \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

La prima di queste due espressioni, però, è la potenza rilevata all'istante t a distanza r dalla carica. Consideriamo invece:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi} |\vec{a}(t)|^2$$

che è la potenza emessa al tempo t che raggiunge l'infinito. Questa sottile distinzione è necessaria perché per studiare l'emissione di quadrimomento vorremmo usare ragionamenti basati sull'invarianza di Lorentz, e quindi è conveniente avere espressioni valutate tutte nello stesso istante.

Vogliamo dunque determinare le formule analoghe a quelle di Larmor nel caso $v \approx 1$.

Supponiamo quindi di porci nel sistema di riferimento di quiete istantanea della particella; in questo, la particella è ferma per definizione, e dunque in esso valgono le formule di Larmor:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \frac{e^2}{6\pi} (|\vec{a}|^2, 0, 0, 0) = \frac{e^2}{6\pi} |\vec{a}|^2 u^\mu$$

ove tutte le grandezze sono valutate in t , e $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ è la quadrivelocità della particella in questo sistema di riferimento.

Il nostro scopo, adesso, è quello di riscrivere quest'espressione in termini di grandezze covarianti (in particolare, dobbiamo "aggiustare" $|\vec{a}|^2$): in questo modo avremo anche determinato il quadrimomento emesso nel

sistema di riferimento del laboratorio, in quanto l'uguaglianza continuerà a valere anche in esso (anche se le espressioni delle grandezze coinvolte cambieranno).

Sappiamo che la quadriaccelerazione w^μ è un oggetto covariante, e che si riduce a $(0, \vec{a})$ nel sistema di riferimento di quiete istantanea della particella; pertanto $w^\nu w_\nu = -|\vec{a}|^2$ è uno scalare di Lorentz. Sostituendo inoltre dt con ds nell'espressione del quadrimomento (perché dt non è covariante):

$$\frac{dP^\mu}{ds} = -\frac{e^2}{6\pi} w^\nu w_\nu u^\mu$$

È questa la formula che cercavamo, detta *formula di Larmor relativistica*.

Come abbiamo già accennato, essendo un'uguaglianza fra quadrivettori, è vera in ogni sistema di riferimento inerziale; esprimendo tutto in termini di t anziché di s ⁹:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi} w^\nu w_\nu (1, \vec{v})$$

In particolare, dunque, l'energia emessa è:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi} w^\nu w_\nu$$

e notiamo anche che in questo caso $d\vec{P}/dt \neq 0$, al contrario di quanto accade nel caso non relativistico. Vediamo adesso delle applicazioni di questa legge.

4.6.1 Acceleratori di particelle

In un acceleratore, delle particelle vengono soggette a campi elettromagnetici esterni, che le accelerano a velocità prossime a quelle della luce.

Detto $F^{\mu\nu}$ il campo elettromagnetico esterno (tutti i campi che nomineremo in questo paragrafo saranno esterni), sappiamo che l'equazione di Lorentz per la particella è:

$$\frac{dP^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu} u_\nu$$

e vale:

$$w^\mu = \frac{1}{m} \frac{dP^\mu}{ds} = \frac{e}{m} \gamma (\vec{v} \cdot \vec{E}; \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

La potenza emessa è pertanto:

$$W = -\frac{e^2}{6\pi} w^\nu w_\nu = \frac{e^4}{6\pi m^2} \frac{1}{1-v^2} \left[|\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{E})^2 \right]$$

Per la presenza del termine $1/(1-v)$, se $v \approx 1$ la potenza emessa dalla particella è enorme; in altre parole, la potenza emessa in regimi ultrarelativistici è molto maggiore di quella emessa nel caso non relativistico.

In termini dell'energia della particella:

$$W = \frac{e^4}{6\pi m^4} \mathcal{E}^2 \left[|\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{E})^2 \right]$$

notiamo dunque che $W \propto 1/m^4$: a parità degli altri parametri, particelle leggere emettono molto più di quelle pesanti, e dunque ad esempio se vengono accelerati elettroni questi emetteranno moltissima energia.

Consideriamo ora i due tipi di acceleratori di particelle: lineari e circolari.

⁹Ricorda che:

$$\frac{d}{ds} = \gamma \frac{d}{dt} \quad u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

Acceleratori lineari

In questo caso è sufficiente un campo elettrico per accelerare la particella, dunque $\vec{B} = 0$ e $\vec{E} \parallel \vec{a} \parallel \vec{v}$. Si ha dunque:

$$W = \frac{e^4}{6\pi m^2} \frac{1}{1-v^2} \left[|\vec{E}|^2 - |\vec{v}|^2 |\vec{E}|^2 \right] = \frac{e^4}{6\pi m^2} \frac{1}{1-v^2} |\vec{E}|^2 (1-v^2) \Rightarrow W = \frac{e^4}{6\pi m^2} |\vec{E}|^2$$

Per capire se questa potenza emessa è rilevante o meno, valutiamo il suo rapporto con la potenza fornita dal campo elettrico, $W_{\text{ext}} = ev|\vec{E}|$:

$$\frac{W}{W_{\text{ext}}} = \frac{e^4}{6\pi m^2} |\vec{E}|^2 \frac{1}{ev|\vec{E}|} = \frac{e^3}{6\pi m^2} \frac{|\vec{E}|}{v} = \frac{2}{3} e \frac{r_0}{m} \frac{|\vec{E}|}{v}$$

ove r_0 è il raggio classico della particella. Detta dunque $d\mathcal{E}/dx$ l'energia fornita dal campo alla particella per unità di lunghezza¹⁰:

$$\frac{W}{W_{\text{ext}}} = \frac{2}{3} \frac{r_0}{m} \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

Pertanto, la potenza dissipata per irraggiamento diventa rilevante se il campo fornisce alla particella, per unità di lunghezza, tanta energia quanta m/r_0 . Tipicamente, negli acceleratori si ha $d\mathcal{E}/dx \approx 100$ MeV/m; nel caso in cui la particella sia un elettrone (che è il caso più sfavorevole possibile, proprio perché particelle leggere emettono moltissimo), $m \approx 0.5$ MeV e $r_0 \approx 3 \cdot 10^{-13}$ cm, dunque $W/W_{\text{ext}} \approx 10^{-13}$.

Pertanto, negli acceleratori lineari l'emissione di energia per irraggiamento è irrilevante.

Acceleratori circolari (o “sincrotroni”)

In questo caso $\vec{B} \neq 0$; ci dovrebbe essere anche un campo elettrico, necessario proprio per accelerare la particella, ma consideriamo il caso in cui questo sia assente, ossia consideriamo la particella avente già altissima velocità. Se dunque $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} \perp \vec{v}$:

$$W = \frac{e^4}{6\pi m^2} \frac{1}{1-v^2} |\vec{v} \times \vec{B}|^2 = \frac{e^4}{6\pi m^2} \frac{1}{1-v^2} v^2 |\vec{B}|^2 \Rightarrow W = \frac{e^4}{6\pi m^2} \frac{v^2}{1-v^2} |\vec{B}|^2$$

Sappiamo che il moto relativistico di una particella in un campo magnetico è tale che la sua frequenza sia:

$$\omega_0 = \frac{e|\vec{B}|}{m} \sqrt{1-v^2} = e \frac{|\vec{B}|}{\mathcal{E}}$$

Convien a questo punto esprimere W in termini di ω_0 invece che di $|\vec{B}|$; dunque:

$$W = \frac{e^2}{6\pi} \frac{v^2}{(1-v^2)^2} \omega_0^2$$

Se ora R è il raggio della circonferenza percorsa dalla particella, poiché $v = \omega_0 R$ allora $\omega_0 = v/R$, e dunque l'energia $\Delta\mathcal{E}$ emessa in un periodo è:

$$\Delta\mathcal{E} = WT = W \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{e^2}{3R} v^3 \left(\frac{\mathcal{E}}{m} \right)^4$$

Poiché $\Delta\mathcal{E} \propto 1/R$, in un acceleratore grande si dissipa meno energia; come prima, poi, $\Delta\mathcal{E} \propto 1/m^4$.

Per renderci conto degli ordini di grandezza, valutiamo $\Delta\mathcal{E}$ nel caso di due importanti acceleratori:

LEP: era un acceleratore di elettroni, con $R = 4.3$ km, $\mathcal{E} = 100$ GeV e $m = 0.5$ MeV. Allora:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx 2 \cdot 10^{-2}$$

Può non sembrare molto, ma in realtà è tantissimo perché gli elettroni in esso compivano circa 11.000 giri al secondo.

¹⁰

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = eE$$

LHC: è un acceleratore di protoni, con $R = 4.3$ km, $\mathcal{E} = 14$ TeV e $m = 1$ GeV. Allora:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx 3 \cdot 10^{-9}$$

non è dunque rilevante, ma nemmeno trascurabile (corrisponde a circa una perdita del 2% dell'energia in un'ora). Il problema tecnico di LHC è che $B \propto \mathcal{E}/(eR)$, e dunque servono campi magnetici intensissimi.

4.6.2 Distribuzione angolare

Studiamo ora la distribuzione angolare della radiazione emessa nel caso ultrarelativistico.

Come abbiamo visto, nel caso non relativistico la potenza emessa dipendeva dalla direzione relativa all'accelerazione della particella, e dipendeva in particolare dal quadrato del seno dell'angolo fra la direzione di osservazione e quella dell'accelerazione. In particolare, dunque, la potenza emessa era massima in direzione perpendicolare all'accelerazione della particella.

Vedremo ora che nel caso ultrarelativistico la situazione è completamente diversa.

La formula esatta per la potenza totale emessa per unità di angolo solido è (sfruttando l'espressione di \vec{E} data dai campi di Lienard-Wiechert):

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 |\vec{E}|^2 = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}) \times \vec{a}]|^2}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})^6}$$

Nel caso non relativistico avevamo $1 - \vec{v} \cdot \vec{n} \approx 1$; nel caso ultrarelativistico è invece proprio questo termine che ci consente di capire la distribuzione angolare della radiazione.

Se infatti si ha $\vec{n} \approx \vec{v}/v$, allora $1 - \vec{v} \cdot \vec{n} \approx 1 - v \xrightarrow{v \rightarrow 1} 0$; dunque, la potenza emessa tende a divergere se \vec{n} è circa collineare alla velocità della particella. La direzione "di riferimento" in questo caso, dunque, è quella di \vec{v} .

A numeratore, poi, c'è un termine $\vec{n} - \vec{v}$, che per $\vec{n} \approx \vec{v}/v$ tende a zero, compensando la divergenza del denominatore. Per comprendere meglio la situazione, riscriviamo la formula come:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}) \times \vec{a}]|^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^4} \quad (4.11)$$

Se dunque $\vec{n} \approx \vec{v}/v$, si avrà:

$$\frac{\vec{n} - \vec{v}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}} \xrightarrow{\vec{n} \approx \vec{v}/v} \frac{\vec{n} - v\vec{n}}{1 - v} = \vec{n}$$

Pertanto, il termine centrale nella (4.11) è costante, e quindi:

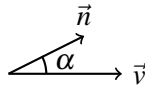
$$\frac{dW}{d\Omega} \stackrel{\vec{n} \approx \vec{v}/v}{\sim} \frac{e^2}{16\pi^2} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a})|^2 \frac{1}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})^4}$$

e poiché $|\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a})| = |\vec{n} \times \vec{a}|$:

$$\frac{dW}{d\Omega} \stackrel{\vec{n} \approx \vec{v}/v}{\sim} \frac{e^2}{16\pi^2} |\vec{n} \times \vec{a}|^2 \frac{1}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})^4}$$

Dobbiamo dunque distinguere due casi:

$\vec{a} \times \vec{v} \neq 0$: (ossia \vec{a} non è parallelo a \vec{v}) se $\vec{n} \approx \vec{v}/v$, allora $|\vec{n} \times \vec{a}| \neq 0$, e posto:



(α è molto piccolo), allora:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2} |\vec{n} \times \vec{a}|^2 \frac{1}{(1 - v \cos \alpha)^4}$$

Pertanto, per $v \approx 1$ il termine più rilevante nell'espressione della potenza emessa per irraggiamento è $1/(1 - v \cos \alpha)^4$. Espandendo per piccoli valori di α :

$$f(\alpha) := \frac{1}{(1 - v \cos \alpha)^4} = \frac{1}{\left(1 - v \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right)^4} = \frac{1}{\left(1 - v + v \frac{\alpha^2}{2}\right)^4} \stackrel{v \approx 1}{\sim} \frac{1}{\left(1 - v + \frac{\alpha^2}{2}\right)^4}$$

Dunque, $f(\alpha)$ è una funzione piccata attorno ad $\alpha = 0$, e il picco è sempre più marcato più il valore di v si avvicina ad 1:

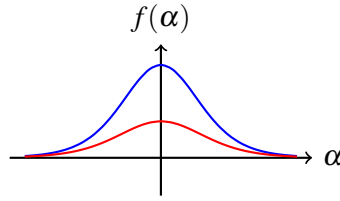
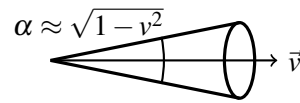


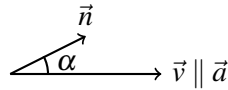
Figura 4.6: Andamento di $f(\alpha)$

La larghezza a metà altezza della campana, poi, è dell'ordine di $\sqrt{1-v^2} \sim \sqrt{1-v}$.

Concludiamo dunque che se $v \approx 1$, la maggior parte della radiazione emessa è tutta concentrata in un cono di angolo solido α centrato sulla direzione di \vec{v} :



$\vec{a} \parallel \vec{v}$: in questo caso:



Dunque:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{(1 - v \cos \alpha)^6}$$

È una situazione leggermente diversa dalla precedente: se $\alpha = 0$, infatti, la potenza emessa è nulla. Detta:

$$f(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha}{(1 - v \cos \alpha)^6}$$

il suo grafico è, approssimativamente:

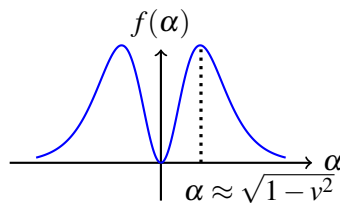


Figura 4.7: Andamento di $f(\alpha)$

In questo caso, dunque, nella direzione esatta della velocità non viene emessa energia, ma comunque la quasi totalità della radiazione è contenuta in un cono di angolo solido $\alpha \sim \sqrt{1-v}$ centrato nella direzione della velocità (che in questo caso coincide con quella dell'accelerazione).

I due casi, dunque, anche se a priori diversi sono sostanzialmente equivalenti.

4.7 Analisi spettrale

Finora abbiamo studiato la dipendenza della radiazione emessa dalla direzione di osservazione. È però interessante anche sapere come è distribuita la radiazione in funzione della frequenza. Vogliamo dunque cercare di capire quantitativamente la *distribuzione spettrale* della radiazione emessa per irraggiamento.

Detta ω la frequenza della radiazione, la sua distribuzione spettrale è:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega}$$

ossia l'energia emessa per unità di frequenza e di angolo solido; volendo possiamo studiare anche $d\mathcal{E}/d\omega$, ossia l'energia totale emessa per unità di frequenza.

Dobbiamo dunque distinguere due casi: quello in cui i fenomeni coinvolti sono periodici e quello in cui non lo sono.

Dall'analisi di Fourier sappiamo che una funzione non periodica ha spettro di frequenze continuo:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) d\omega$$

mentre nel caso di fenomeni periodici, detto T il periodo e ω_0 la relativa frequenza, si avrà:

$$f(t+T) = f(t) \Rightarrow f(t) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} e^{-iN\omega_0 t} f_N$$

ove f_N sono i coefficienti di Fourier della serie.

È utile anche l'*identità di Parsifal*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Inoltre se f è reale, ossia $f(t) = f^*(t)$, allora $\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}^*(-\omega)$. In questo caso, dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega$$

L'analogo di questa relazione nel caso di spettro discreto (ossia di fenomeni periodici) è:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = 2 \sum_{N=1}^{\infty} |f_N|^2 + |f_0|^2$$

Supponiamo dunque di avere a che fare con un fenomeno non periodico; allora la quadricorrente $j^\mu(t, \vec{x})$ non sarà periodica, e quindi:

$$j^\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} j^\mu(\omega, \vec{x}) d\omega$$

Si avrà quindi anche:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \vec{E}(\omega, \vec{x}) d\omega$$

Le formule che abbiamo usato finora ci hanno permesso di stabilire che:

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 |\vec{E}(t)|^2$$

Dunque:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{d\Omega} dt = r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}(t)|^2 dt$$

e per l'identità di Parsifal:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = 2r^2 \int_0^{+\infty} |\vec{E}(\omega)|^2 d\omega$$

Pertanto:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = 2r^2 |\vec{E}(\omega)|^2$$

Nel caso periodico (indichiamo con \bar{x} la media temporale di x):

$$\frac{d\bar{W}}{d\Omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{d\Omega} dt \Rightarrow \frac{dW_N}{d\Omega} = 2r^2 |\vec{E}_N|^2$$

ove N è un intero, che indica il multiplo della frequenza fondamentale.

Dobbiamo quindi calcolare $\vec{E}(\omega)$, e lo facciamo partendo dall'espressione del quadripotenziale:

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} \int j^\mu(t - r + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) d^3 \vec{y} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

In termini della trasformata di Fourier della quadricorrente:

$$j^\mu(t, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} j^\mu(\omega, \vec{y}) d\omega$$

allora:

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-i\omega r}}{4\pi r} \int e^{i\omega \vec{n} \cdot \vec{y}} j^\mu(\omega, \vec{y}) d^3 \vec{y} \right] d\omega$$

(ove il termine fra parentesi è $A^\mu(\omega, \vec{x})$).

Ora, poiché:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A})$$

(che è un'espressione conseguenza della relazione delle onde, dunque valida per grandi r , come stiamo supponendo noi), allora:

$$\vec{E}(\omega, \vec{x}) = i\omega \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}(\omega, \vec{x})) = i\omega \frac{e^{-i\omega r}}{4\pi r} \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \int e^{i\omega \vec{n} \cdot \vec{y}} \vec{j}(\omega, \vec{y}) d^3 \vec{y} \right)$$

In linea di principio, dunque, il problema è risolto; la questione è se riusciamo a calcolare l'integrale o meno. Vediamo dunque di capire in quali contesti possiamo estrarre informazioni qualitative sullo spettro emesso. Al solito, consideriamo i regimi non relativistico e ultra-relativistico.

Caso non relativistico

Abbiamo già visto in 4.3.1 con l'approssimazione di dipolo che se la frequenza caratteristica del fenomeno è ω , anche la radiazione emessa ha frequenza ω . Il limite in cui quest'approssimazione è valida è $v \ll 1$, equivalente alla richiesta $\omega \ell \ll 1$, con ℓ dimensioni caratteristiche del sistema. In questo regime, $\omega \vec{n} \cdot \vec{y}$ è trascurabile, perché $\omega \vec{n} \cdot \vec{y} \lesssim \omega \ell \ll 1$. Dunque, in questo caso:

$$\vec{E}(\omega, \vec{x}) = i\omega \frac{e^{-i\omega r}}{4\pi r} \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \int \vec{j}(\omega, \vec{y}) d^3 \vec{y} \right)$$

Quest'integrale si può calcolare con la trasformata di Fourier del momento di dipolo:

$$\vec{D}(t) = \int \vec{j}(t, \vec{y}) d^3 \vec{y} \Rightarrow i\omega \vec{D}(\omega) = \int \vec{j}(\omega, \vec{y}) d^3 \vec{y}$$

Pertanto:

$$\vec{E}(\omega, \vec{x}) = -\omega^2 \frac{e^{-i\omega r}}{4\pi r} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{D}(\omega)) \Rightarrow \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi^2} |\vec{n} \times \vec{D}(\omega)|^2$$

Dunque, le frequenze emesse sono quelle per le quali $\vec{D}(\omega) \neq 0$. Se il tempo caratteristico del fenomeno è T , allora $\vec{D}(\omega) \neq 0$ se $\omega \lesssim 1/T$; quindi, le frequenze emesse in quest'approssimazione sono $\omega \lesssim 1/T$. Se il fenomeno è periodico, allora l'unica frequenza emessa è ω , in quanto $\vec{D}(\omega)$ è non nullo solo per quella frequenza.

Caso ultra-relativistico

In questo caso $v \approx 1$.

Per semplicità, consideriamo una particella carica in moto. Sappiamo che, per l'espressione dei campi di Lienard-Wiechert:

$$\vec{E}(t) = \frac{e}{4\pi r} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}) \times \vec{a}]}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})^3} \Big|_{t'}$$

ove \vec{v} e \vec{a} sono calcolate al tempo t' , definito dalla relazione:

$$t = t' + r - \vec{n} \cdot \vec{y}(t')$$

(valida per grandi r). Cercare di fare il conto esatto (cioè estraendo t' e sostituendolo) è estremamente complicato, ma qualcosa si riesce comunque a dire.

Si ha:

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \vec{E}(t) dt$$

per semplificare l'integrale, cambiamo variabile da t a t' . Allora si ha (gli estremi d'integrazione non cambiano se \vec{y} è una traiettoria al finito):

$$\begin{aligned} dt &= dt' - \vec{n} \cdot \vec{v}(t') dt' \Rightarrow dt = dt' (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t')) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{E}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e}{4\pi r} e^{-i\omega(t' + r - \vec{n} \cdot \vec{y}(t'))} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}) \times \vec{a}]}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})^2} dt' \Big|_{t'} \end{aligned}$$

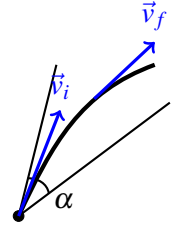
Quindi (cambiando nome alla variabile d'integrazione in t):

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega(t - \vec{n} \cdot \vec{y})} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}) \times \vec{a}]}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})^2} dt \right|^2 \quad (4.12)$$

Questa è ancora una formula esatta (non abbiamo introdotto nessuna approssimazione).

Supponiamo ora che il moto della particella sia “quasi rettilineo”, nel senso che ora specifichiamo (in realtà si può mostrare che quello che troveremo vale per un moto qualunque; facciamo quest'ipotesi per semplificare i conti). Chiamiamo χ l'angolo di deflessione della particella durante il moto (nella figura, è l'angolo fra \vec{v}_i e \vec{v}_f).

Abbiamo già visto che la quasi totalità della radiazione emessa dalla particella è contenuta in un cono di angolo solido $\alpha \sim \sqrt{1 - v^2}$; diremo dunque che il moto della particella è “quasi rettilineo” se $\chi \ll \alpha$.



In quest'approssimazione possiamo valutare l'integrale nella (4.12), e lo facciamo prendendo $\vec{n} \approx \vec{v}/v$, a meno di angoli di ordine α . Pertanto, $\vec{n} - \vec{v} \approx \vec{n}(1 - v)$ e $1 - \vec{n} \cdot \vec{v} \approx 1 - v$; possiamo poi approssimare il moto come rettilineo, e dunque $\vec{y} \approx \vec{v}t$ e $t\vec{n} \cdot \vec{v} \approx (1 - v)t$, con $v \approx 1$. L'unica quantità che dipende significativamente dal tempo nell'integrale è \vec{a} .

Dunque:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} \approx \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{(1 - v)^2} \left| \vec{n} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega(1 - v)t} \vec{a}(t) dt \right|^2$$

Ma il termine nell'integrale è la trasformata di Fourier di \vec{a} valutata in $\omega(1 - v)$. Pertanto:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{(1 - v)^2} |\vec{n} \times \vec{a}(\omega(1 - v))|^2 \quad (4.13)$$

Nelle nostre approssimazioni, poi, $1 - v \approx 1 - v^2$.

Il fattore $1/(1 - v)^2$ nella (4.13) è espressione del fatto che in regime ultra-relativistico viene emessa molta più energia rispetto al caso non relativistico. Il termine $\vec{a}(\omega(1 - v))$, invece, aumenta le frequenze emesse dal sistema: infatti, se il processo ha un tempo caratteristico T , allora $\vec{a}(\omega) \neq 0$ se $\omega \lesssim 1/T$; poiché però nel caso ultra-relativistico compare $\vec{a}(\omega(1 - v))$, ciò significa che l'energia emessa per unità di frequenza e angolo solido è significativamente diversa da zero se $(1 - v)\omega \lesssim 1/T$, ossia:

$$\omega \lesssim \frac{1}{1 - v} \frac{1}{T} \approx \frac{1}{1 - v^2} \frac{1}{T} = \left(\frac{\mathcal{E}}{m} \right)^2 \frac{1}{T}$$

Dunque, nel limite $v \sim 1$, le frequenze emesse sono molto più grandi di $1/T$ (ciò può anche essere visto come una sorta di effetto Doppler).

Come detto, anche se abbiamo ipotizzato il moto quasi rettilineo, tutti i risultati che abbiamo appena trovato si applicano a moti qualunque.

In un sincrotrone, ad esempio, detta ω_0 la frequenza di sincrotrone, ci aspetteremmo $T \approx 1/\omega_0$; in realtà ciò non è corretto, e si ha $T \approx \alpha/\omega_0$ (il tempo caratteristico è quello che la particella impiega a percorrere un arco di circonferenza dell'ordine di α), ossia:

$$T \approx \frac{\sqrt{1-v^2}}{\omega_0} = \frac{m}{\mathcal{E}} \omega_0$$

Dunque:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega \lesssim \left(\frac{\mathcal{E}}{m}\right)^3 \omega_0 \approx \frac{1}{R} \left(\frac{\mathcal{E}}{m}\right)^3$$

Ad esempio, a LEP si ha $1/\omega = \lambda = 10^{-3}$ nm, mentre a LHC $\lambda \simeq 1$ nm.

4.8 Effetto Čerenkov

È la prima (e l'ultima) applicazione che vedremo dell'elettromagnetismo in un mezzo materiale.

L'effetto Čerenkov consiste nell'osservazione di radiazione emessa da parte di una soluzione dielettrica (tipicamente acqua) quando questa viene investita da radiazione altamente energetica, ad esempio raggi γ . La radiazione osservata è tipicamente bluastra (vicina all'ultravioletto) e viene emessa con un angolo ben preciso rispetto alla direzione della radiazione incidente, e quest'angolo dipende solo dall'energia dei raggi γ e dall'indice di rifrazione del mezzo.

Ciò che accade è che i raggi γ urtando gli atomi d'acqua possono mettere in moto gli elettroni (per effetto Compton), i quali iniziano dunque a muoversi a velocità sostanzialmente costante nel mezzo; questa velocità può però essere molto grande; come vedremo, se v è la velocità degli elettroni e c_m è la velocità della luce nel mezzo ($c_m = c/\sqrt{\epsilon}$, con ϵ costante dielettrica del mezzo, e $n = \sqrt{\epsilon}$ indice di rifrazione dello stesso; dunque $c_m = c/n < c$, perché tipicamente $n > 1$), allora se $v > c_m$ si ha emissione di radiazione, anche se la velocità delle particelle è costante.

L'effetto Čerenkov ha anche interessanti applicazioni teoriche (ad esempio, se esistessero particelle che si muovono a velocità maggiori di quella della luce nel vuoto, i cosiddetti *tachioni*, allora questi dovrebbero emettere per effetto Čerenkov), ma noi non ce ne occuperemo.

Cominciamo, dunque, riscrivendo le equazioni di Maxwell nel mezzo. Trascurando qualunque effetto dovuto alla suscettibilità magnetica (dunque $\mu = 1$), possiamo riscriverle effettuando le seguenti sostituzioni:

$$\vec{E} \rightarrow n\vec{E} \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B} \quad c \rightarrow \frac{c}{n} \quad \rho \rightarrow \frac{\rho}{n} \quad \vec{j} \rightarrow \frac{\vec{j}}{n} \quad (4.14)$$

Dunque (tralasciamo le equazioni relative alle identità di Bianchi, perché come già detto più volte non sono vere e proprie equazioni dinamiche):

$$-\frac{n^2}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{c} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{n^2}$$

A partire da queste, vogliamo studiare la radiazione emessa da una particella carica con velocità costante¹¹ $v > c/n$.

Poiché tutti i risultati che abbiamo ottenuto nel vuoto relativamente alle onde elettromagnetiche erano conseguenza delle equazioni di Maxwell (nel vuoto), e che quelle in un mezzo materiale si ottengono attraverso le sostituzioni (4.14), allora tutte le proprietà delle onde elettromagnetiche in un mezzo si otterranno da quelle del

¹¹Nota: stiamo considerando n come una costante. In realtà ciò non è vero: l'indice di rifrazione del mezzo è una funzione della frequenza della radiazione che lo attraversa, ossia $n = n(\omega)$. Questa considerazione ci servirà poi in seguito.

vuoto con le stesse sostituzioni.

Se chiamiamo $y^\mu(s)$ la linea d'universo della particella, nel vuoto si avrà:

$$A^0(x) = \frac{e}{2\pi} \int \frac{dy^0}{ds} \Theta(x^0 - y^0(s)) \delta(x - y(s))^2 ds$$

Le dimensioni di A^0 devono essere quelle di una carica fratto una lunghezza; verifichiamo se è così anche in questo caso, e se così non fosse inseriamo delle opportune potenze di c . Si ha:

$$y^0 = ct \rightsquigarrow [y^0] = L \quad [\delta(x - y(s))^2] = \frac{1}{[(x - y(s))^2]} = \frac{1}{L^2}$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che la δ ha sempre come dimensione l'inverso della dimensione del suo argomento (altrimenti l'integrale della δ su tutto il suo dominio di definizione non potrebbe essere un numero puro). Pertanto, effettivamente, $[A^0] = e/L$, e dunque non è necessario introdurre nessuna c .

Nel mezzo, quindi:

$$nA^0 = \frac{e}{2\pi n^2} \int \frac{dy^0}{ds} \Theta(x^0 - y^0(s)) \delta[(x - y(s))_n^2] ds \Rightarrow A^0 = \frac{e}{2\pi n^3} \int \frac{dy^0}{ds} \Theta(x^0 - y^0(s)) \delta[(x - y(s))_n^2] ds$$

Il pedice n all'interno dell'argomento della δ sta a indicare che il prodotto scalare non è quello di Minkowski, ma è diverso per via della comparsa di fattori c nell'argomento, i quali si “portano dietro” delle n nell'applicare le sostituzioni (4.14); in particolare, abbiamo posto:

$$x_n^2 = \frac{(x^0)^2}{n^2} - |\vec{x}|^2$$

Supponendo ora che la particella che stiamo considerando si muova lungo l'asse z , poiché il suo moto è rettilineo uniforme allora $y^\mu(s) = u^\mu s$, con $u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v)$.

A questo punto, dobbiamo determinare i valori di s tali che $(x - y(s))_n^2 = 0$ e $x^0 - y^0(s) > 0$. Se fossimo nel vuoto sappiamo che queste due condizioni ammettono un'unica soluzione; vedremo adesso che ciò non è più vero nel mezzo, come conseguenza del fatto che il prodotto scalare non è più quello di Minkowski.

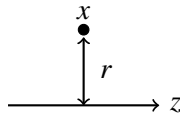
Si ha:

$$(x - y(s))_n^2 = x_n^2 - 2(x \cdot u)_n s + s^2 u_n^2 = 0 \quad (4.15)$$

ove:

$$u_n^2 = \frac{1}{1 - v^2} \left(\frac{1}{n^2} - v^2 \right) < 0$$

Se ora chiamiamo $\vec{x} = (x, y, z)$, poniamo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



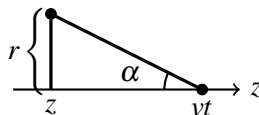
Allora:

$$x_n^2 = \frac{t^2}{n^2} - (r^2 + z^2) \quad (x \cdot u)_n = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left(\frac{t}{n^2} - vz \right)$$

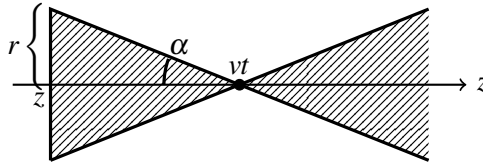
La (4.15) ha soluzioni reali se e solo se il suo discriminante è non nullo:

$$(x \cdot u)_n^2 - x_n^2 u_n^2 \geq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{r^2}{(z - vt)^2 + r^2} < \frac{1}{v^2 n^2}$$

Scritta così, quest'espressione non è molto illuminante; cerchiamo di comprenderne meglio il significato:

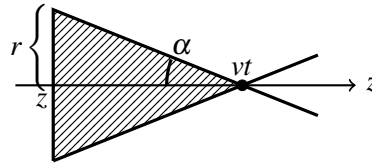


Con queste notazioni, l'espressione diventa $|\sin \alpha| < 1/(vn)$. Le soluzioni della (4.15), dunque, si trovano nella zona:

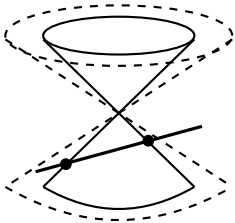


(notare che affinché ciò abbia senso è necessario che $v > 1/n$, ossia che la particella si muova a velocità maggiori di quella della luce nel mezzo).

Dobbiamo però imporre anche la condizione $x^0 - y^0(s) > 0$. Si verifica (il conto è lasciato per esercizio) che questa condizione è soddisfatta se e solo se $z - vt < 0$; dunque, le soluzioni che stiamo cercando si trovano nella zona:



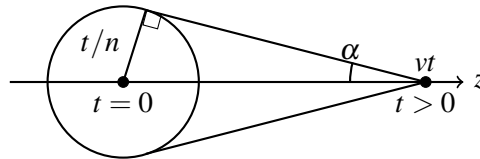
Inoltre, gli s che soddisfano la (4.15) e la condizione $z - vt < 0$ sono due: esistono quindi due soluzioni distinte (e non una come nel vuoto).



Possiamo anche capire intuitivamente perché ciò accada: nel mezzo materiale il cono luce di x sarà più “stretto” di quello che si avrebbe nel vuoto (perché la velocità della luce è minore), e la linea d'universo della particella sarà una retta (perché si muove di moto rettilineo uniforme). Poiché però la retta ha un'inclinazione maggiore di quella delle pareti del cono luce nel mezzo (ma ovviamente minore di quello nel vuoto) lo interseca in due punti.

Supponiamo ora di iniziare a osservare il fronte d'onda emesso dalla particella all'istante $t = 0$; questo fronte si propagerà a velocità $1/n$, mentre la particella a velocità $v > 1/n$.

Dopo un tempo t , la particella ha coordinata z pari a vt , e il fronte d'onda si è propagato fino alla distanza t/n dal punto in cui è stato generato:



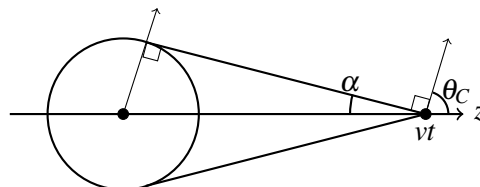
Nei punti intermedi possiamo disegnare i fronti d'onda emessi, perché la retta che congiunge il primo fronte alla particella è quella che (ovviamente) delimita tutti i fronti emessi successivamente; la radiazione, insomma, è visibile solo nel cono composto dagli involucri dei fronti d'onda.

Valutiamo l'apertura angolare di questi fronti; considerando il triangolo rettangolo in figura:

$$\sin \alpha = \frac{t}{n} \frac{1}{vt} = \frac{1}{nv}$$

che è proprio l'angolo che abbiamo determinato in precedenza.

Quando i fronti d'onda si espandono, le onde risultanti si propagano lungo la direzione perpendicolare al fronte:



$$\cos \theta_C = \sin \alpha = \frac{1}{vn}$$

ove θ_C è detto *angolo di Čerenkov*, ed è quello che individua la direzione di emissione della radiazione Čerenkov. Come avevamo già detto all'inizio, risulta proprio che θ_C dipende solo da v e da n .

Non ci addentriamo maggiormente nell'argomento, limitandoci a riportare dei risultati.

Si ha che:

- Guardando il campo a grandi distanze, ad esempio A^0 , o meglio la sua componente di frequenza ω , allora si ha:

$$A^0 \approx \frac{\text{cost.}}{\sqrt{r}} e^{i\omega t - i(k_z z + k_r r)}$$

ove $k_z = \omega/v$ e $k_r = (\omega/v)\sqrt{v^2 n^2 - 1}$. Se dunque $v > 1/n$ non ci sono problemi (la radice è reale), mentre se $v < 1/n$ si ha un'onda evanescente¹². Questo, dunque, conferma che c'è emissione solo se la velocità della particella è maggiore di quella della luce nel mezzo.

I campi elettrico e magnetico vanno dunque all'infinito come $1/\sqrt{r}$, e ciò è dovuto alla simmetria cilindrica del sistema; come conseguenza di ciò si ha un flusso di energia non nullo all'infinito. Risulta infatti che la potenza totale emessa è:

$$W \approx \int_{\Sigma} |\vec{E}|^2 r dr dz d\varphi$$

che è stata ottenuta integrando il vettore di Poynting \vec{S} su una superficie cilindrica Σ coassiale con l'asse z . La misura in questo caso contiene r e non r^2 proprio perché stiamo usando coordinate cilindriche. Ora, poiché $|\vec{E}|^2 \propto 1/r$, nel limite $r \rightarrow \infty$ si ha un risultato finito.

- Si può anche vedere che:

$$\frac{d^3 \mathcal{E}}{dz d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 n v} (n^2 v^2 - 1) \omega \delta(1 - n v \cos \theta)$$

(infatti, $d^2 \mathcal{E}/(d\omega d\Omega)$ non sarebbe una quantità ben definita per la simmetria del sistema; integrando infatti anche in dz divergerebbe). La presenza della δ conferma il fatto che c'è radiazione solo in una precisa direzione $\cos \theta_C = 1/(nv)$. Inoltre, l'energia emessa dipende da ω : c'è tanta più energia emessa quanto più grande è la frequenza. Si potrebbe quindi pensare che ci siano delle divergenze: in realtà, abbiamo già notato che l'indice di rifrazione $n(\omega)$ è una funzione della frequenza, e tende a 1 per $\omega \rightarrow \infty$; per grandi frequenze, dunque, il mezzo tende a comportarsi come il vuoto, e dunque non c'è emissione. Insomma, il fatto che n dipenda da ω evita che ci siano divergenze nell'energia emessa per grandi frequenze.

Il picco delle frequenze nella radiazione emessa avviene per ω abbastanza grande ma tale da non rendere $n(\omega)$ apprezzabilmente simile a 1, ed è (come osservato) nel blu, tendente all'ultravioletto.

Applicazione pratiche dell'effetto Čerenkov si trovano negli acceleratori: in Super-Kamiokande, ad esempio, dei neutrini cosmici impattano contro dell'acqua, e se hanno abbastanza energia mettono in moto gli elettroni, che dunque emettono radiazione Čerenkov. Studiando questa radiazione, è possibile risalire a informazioni relative ai neturini.

¹²In realtà, in questo caso si ha che $\sqrt{v^2 n^2 - 1} = \pm i\sqrt{1 - v^2 n^2}$. Sostituendo in A^0 , otteniamo due soluzioni: un'onda che aumenta esponenzialmente all'infinito, che non ha senso fisico, e una evanescente. La prima va dunque scartata.

Capitolo 5

Argomenti finali

5.1 Reazione di radiazione

Fino ad ora abbiamo risolto le equazioni di Maxwell e di Lorentz:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}(y(s))u_\nu \quad (5.1)$$

e le abbiamo considerate come completamente indipendenti (per risolvere l'equazione di Maxwell supponevamo j^ν noto, e viceversa per risolvere l'equazione di Lorentz supponevamo $F^{\mu\nu}$ noto).

In realtà, il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ che compare nell'equazione di Lorentz è la somma di due termini: $F_{\text{ext}}^{\mu\nu}$, dovuto ai campi esterni, ed è la componente che abbiamo sempre supposto nota, e $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$, il campo di radiazione prodotto dal moto delle cariche. Fino ad adesso, insomma, abbiamo trascurato $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$; considerandolo, però, il sistema (5.1) diventa praticamente irrisolvibile, perché è un sistema di equazioni accoppiate.

Il problema fondamentale che rende malposta tutta l'elettrodinamica è che $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ è valutato in $y(s)$, ossia nel punto in cui si trova la particella, e tipicamente i campi di radiazione divergono in quel punto.

Cerchiamo dunque di capire quando la reazione di radiazione è trascurabile, istantaneamente; vogliamo insomma capire quando è corretto trascurare, istante per istante, $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ nella risoluzione delle equazioni di Maxwell e di Lorentz.

Supponiamo di studiare ciò che avviene nel moto di una carica in un tempo Δt , con Δt tempo caratteristico del fenomeno in esame (ossia $\Delta v \sim v$ in Δt), e cerchiamo di capire quando è lecito trascurare i termini di radiazione.

Sono coinvolte due energie: $\Delta\mathcal{E}$, l'energia irradiata nel tempo Δt , e $\Delta\mathcal{E}_0$, la variazione di energia dovuta alla forza esterna. Chiaramente, la reazione di radiazione è trascurabile se $\Delta\mathcal{E} \ll \Delta\mathcal{E}_0$.

Per semplificare il tutto, supponiamo di essere in regime non relativistico, ossia $v \ll 1$; in caso contrario le conclusioni sarebbero comunque le stesse perché ci si può sempre portare nel sistema di riferimento di quiete istantanea della particella (consideriamo insomma il regime non relativistico perché i conti sono più semplici).

Allora:

$$\Delta\mathcal{E}_0 = \Delta \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = mv\Delta v \approx m(\Delta v)^2$$

e poiché $\Delta v = a\Delta t$:

$$\Delta\mathcal{E}_0 = ma^2(\Delta t)^2$$

Inoltre, sfruttando la formula di Larmor:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{e^2}{6\pi}a^2\Delta t$$

Dunque:

$$\Delta\mathcal{E} \ll \Delta\mathcal{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^2}{6\pi m} \ll \Delta t$$

Se quindi questa condizione è soddisfatta, la reazione di radiazione è trascurabile.

Vediamo se è verificata nei casi concreti. Ricordando la definizione di raggio classico di una particella:

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}$$

la condizione diventa, reintroducendo le c :

$$\frac{2}{3} \frac{r_0}{c} \ll \Delta t$$

Per brevità, poniamo $\tau := 2r_0/(3c)$; ad ogni particella abbiamo dunque associato un tempo, che è quello che impiega la luce a percorrere una distanza dell'ordine di r_0 . Poiché r_0 è piccolissimo, in generale, allora anche τ è piccolissimo, e quindi $\tau \ll \Delta t$.

Ad esempio, per l'elettrone $r_0 \approx 10^{-13}$ cm, e dunque si ha $\tau \approx 10^{-23}$ s; se dunque il tempo caratteristico di un fenomeno è molto maggiore di 10^{-23} s (cosa che avviene praticamente in qualunque fenomeno fisico), allora la reazione di radiazione è trascurabile. Per questo motivo, ai fini pratici questo processo può non essere considerato.

5.1.1 Le divergenze ultraviolette

In linea di principio, però, questo problema è sempre presente. Ci chiediamo dunque se c'è un modo di formulare l'elettrodinamica tenendone conto; in altre parole, dobbiamo dare senso a:

$$\lim_{x \rightarrow y(s)} F_{\text{rad}}^{\mu\nu}(x) \quad (5.2)$$

Si ha che $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}(x) \sim 1/|x - y(\bar{s})|^2$ (ove compare il modulo quadro in quanto stiamo valutando il campo a piccole distanze dalla carica, dove dominano i termini di velocità), e se $x \rightarrow y(s)$ allora $\bar{s} \rightarrow s$ (il ritardo si annulla avvicinandosi al punto di emissione). Dunque, il limite nella (5.2) diverge.

Questo tipo di divergenze sono dette “ultraviolette” perché hanno origine a piccole distanze dalla carica (e in meccanica quantistica, piccole distanze corrispondono a grandi energie).

In elettrodinamica classica c'è un'altra divergenza ultravioletta legata a questa, detta *problema dell'auto-energia di una particella*, ad esempio di un elettrone.

Data infatti una particella carica, questa genera un campo elettromagnetico che trasporta energia \mathcal{E} , detta *auto-energia* della particella. Detto dunque $r = |x - y(s)|$, si ha:

$$\mathcal{E} = \int T_{\text{emg}}^{00} d^3r$$

e:

$$T_{\text{emg}}^{00} \sim (F^{\mu\nu})^2 \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{r^4}$$

Dunque:

$$\mathcal{E} \sim \int \frac{1}{r^4} d^3r = \int \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{r^4} dr d\Omega \rightarrow \infty$$

ove l'integrale converge per $r \rightarrow \infty$, ma diverge per $r \rightarrow 0$. La divergenza, poi, è lineare perché l'integrale va come $1/r$.

È, questa, un'altra inconsistenza dell'elettromagnetismo classico, che rende il concetto stesso di massa di una particella non ben definito (poiché infatti massa e energia sono equivalenti in relatività, la massa delle particelle dovrebbe essere infinita).

Come si possono risolvere questi problemi?

Ciò che in genere si fa in presenza di una divergenza è introdurre una *rinormalizzazione*, ossia si modifica la teoria per cercare di eliminare la divergenza. Vediamo meglio di cosa si tratta.

5.1.2 La rinormalizzazione

Dobbiamo riuscire a dare senso alla (5.2).

Sostituiamo dunque $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}(x)$ con un'altra funzione $F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}(x)$, ove ε è un parametro detto “di regolarizzazione”, definito in modo tale che $F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ e che $\lim_{x \rightarrow y(s)} F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}(x)$ sia finito per $\varepsilon \neq 0$. In generale si richiede, poi, che $F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}$ non rompa l'invarianza di Lorentz (anche se in generale non risolverà più le equazioni di Maxwell).

In questo caso, una rinormalizzazione funzionante la si determina considerando il campo di Lienard-Wiechert e modificando le condizioni $(x - y(\bar{s}))^2 = 0$ e $x^0 - y^0(\bar{s}) > 0$ con:

$$(x - y(\bar{s}))^2 = \varepsilon^2 \quad x^0 - y^0(\bar{s})$$

(che è una richiesta invariante di Lorentz). In questo modo, la soluzione \bar{s}_ε è funzione di ε e tale che $\bar{s}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{s}$. A questo punto, l'equazione di Lorentz della teoria regolarizzata sarebbe:

$$m \frac{du^\mu}{ds} = eF_{\text{ext}}^{\mu\nu}(y(s))u_\nu + eF_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}(y(s))u_\nu \quad (5.3)$$

e $F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}$ è ben definito.

Rifacendo tutti i conti (che non vediamo), si trova che il limite di $F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ è ancora divergente. Sono dunque necessarie altre modifiche, ad esempio in modo tale da introdurre nuove divergenze che eliminino quelle presenti.

Ciò che si fa è modificare la massa della particella, ossia sostituire a m la grandezza m_ε , di modo che la (5.3) abbia un limite finito per $\varepsilon \rightarrow 0$. Non è ovvio che questa strategia funzioni: ciò accade infatti solo se le divergenze dovute a $F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}$ sono proporzionali a du^μ/ds .

Risulta che m_ε dev'essere definita come:

$$m_\varepsilon = m - \frac{e^2}{8\pi\varepsilon}$$

In questo modo, infatti, la divergenza introdotta da m_ε si semplifica con quella di $F_{\text{rad},\varepsilon}^{\mu\nu}$. Una possibile interpretazione di questa definizione è che m_ε è la massa della particella alla quale viene sottratto il contributo infinito dell'auto-energia.

In conclusione, una soluzione completamente soddisfacente di questo problema non c'è.

Vediamo ora l'equazione che risulta nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Sappiamo che:

$$\frac{dP_{\text{rad}}^\mu}{ds} = -\frac{e^2}{6\pi} w^2 u^\mu$$

(è la formula di Larmor relativistica). Se vogliamo scrivere un'equazione che esprima dp^μ/ds , questa sarà del tipo:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF_{\text{ext}}^{\mu\nu}u_\nu - \frac{dP_{\text{rad}}^\mu}{ds} + \dots \Rightarrow \frac{dp^\mu}{ds} = eF_{\text{ext}}^{\mu\nu}u_\nu + \frac{e^2}{6\pi} w^2 u^\mu + \dots$$

I puntini sono necessari perché altrimenti l'equazione non sarebbe consistente; se questi infatti non ci fossero, dato che $u_\mu dp^\mu/ds = 0$, moltiplicando l'equazione per u_μ il primo membro sarebbe nullo, mentre il secondo no.

È questa la più semplice equazione che possiamo scrivere che soddisfi la conservazione del quadrimpulso.

Vogliamo vedere ora che, aggiungendo un termine, l'equazione diventa consistente, e prende il nome di *equazione di Lorentz-Dirac*, che è la stessa che si otterrebbe con la rinormalizzazione.

Cerchiamo dunque di capire com'è fatto questo termine:

$$w^\mu u_\mu = 0 \quad \forall s \Rightarrow \frac{d}{ds}(w^\mu u_\mu) = \frac{dw^\mu}{ds}u_\mu + w^\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0$$

Ora, però, $w^2 u^\mu u_\mu = w^2 = -\frac{dw^\mu}{ds}u_\mu$. Dunque:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF_{\text{ext}}^{\mu\nu}u_\nu + \frac{e^2}{6\pi} w^2 u^\mu + \frac{e^2}{6\pi} \frac{dw^\mu}{ds}$$

e adesso l'equazione è consistente; il termine che abbiamo aggiunto è detto *termine di Schott*.

Notiamo che nell'equazione non consistente compare solo il quadrimpulso emesso all'infinito (è quello dovuto ai campi di accelerazione, che vanno come $1/r$ e quindi danno un contributo non nullo all'infinito), mentre il termine di Schott può essere pensato come il quadrimpulso emesso dalle particelle trasportato da campi che non sono di accelerazione (si tratta di impulso che "si perde" all'infinito).

Notiamo poi che se assumiamo che all'infinito la quadriaccelerazione si annulli (com'è fisicamente ragionevole), oppure se il moto è periodico (integrando su un periodo), il termine di Schott non altera il quadrimpulso della particella:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^\mu}{ds} ds = \dots = \frac{e^2}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw^\mu}{ds} ds = \frac{e^2}{6\pi} (w^\mu(+\infty) - w^\mu(-\infty))$$

5.1.3 L'equazione di Lorentz-Dirac e le sue conseguenze

Pertanto, l'equazione di Lorentz-Dirac è:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF_{\text{ext}}^{\mu\nu}u_\nu + \frac{e^2}{6\pi}w^2u^\mu + \frac{e^2}{6\pi}\frac{dw^\mu}{ds}$$

Si tratta dell'equazione che, dati i campi esterni, determina la traiettoria della particella tenendo conto della reazione di radiazione.

Notiamo però che a differenza di tutte le equazioni del moto che conosciamo, questa è un'equazione del *terzo* ordine: ciò è molto strano, perché significa che per determinare la traiettoria di una particella *non* è sufficiente conoscere posizione e velocità iniziali (serve anche l'accelerazione iniziale). L'equazione di Lorentz-Dirac, infatti, porta a conseguenze patologiche e paradossali: ciò è espressione del fatto che l'elettromagnetismo classico non è completamente consistente.

Per analizzare queste conseguenze paradossali, consideriamo le componenti spaziali dell'equazione di Lorentz-Dirac nel limite non relativistico (ossia $w^\mu \rightarrow (0, \vec{a})$, $u^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$ e $s \rightarrow t$ nel sistema di riferimento di quiete istantanea):

$$m\vec{a} = \frac{e^2}{6\pi} \frac{d}{dt} \vec{a} + e\vec{E} \quad (5.4)$$

(il termine con \vec{B} è trascurabile). Consideriamo il caso in cui non ci sia campo esterno, ossia $\vec{E} = 0$; ci aspettiamo dunque che $\vec{a} = 0$ (ossia la particella si muove di moto rettilineo uniforme). In realtà, se $\vec{E} = 0$ la (5.4) diventa:

$$\vec{a} = \frac{e^2}{6\pi m} \frac{d\vec{a}}{dt} := \tau \frac{d\vec{a}}{dt}$$

e quindi $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 e^{\frac{t}{\tau}}$: secondo la (5.4) una particella in assenza di campi esterni accelererebbe, con un'accelerazione che peraltro diverge all'infinito (questo tipo di soluzioni sono dette “run-away”).

Si tratta, ovviamente, di soluzioni fisicamente insensate, a parte il caso $\vec{a}_0 = 0$. Se dunque aggiungessimo la condizione $\vec{a}_0 = 0$ si avrebbe effettivamente $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{a}(t) = 0$, e quindi teoricamente avremmo risolto questo paradosso (anche se il fatto di dover aggiungere una condizione ad hoc è decisamente poco soddisfacente).

Il problema è che esiste un altro paradosso, decisamente più grave, detto “preaccelerazione”: in pratica, risolvendo esplicitamente l'equazione di Lorentz-Dirac risulta che l'accelerazione della particella anticipa la forza, ossia risente della forza prima ancora che questa si sia effettivamente esercitata; si tratta insomma di una palese violazione del principio di causalità.

Vediamo un modo approssimato per renderci conto di questo paradosso. Riscriviamo l'equazione di Lorentz-Dirac come ($\tau := e^2/6\pi m$):

$$m \left(w^\mu - \tau \frac{dw^\mu}{ds} \right) = eF_{\text{ext}}^{\mu\nu}u_\nu + \frac{e^2}{6\pi}w^2u^\mu := F_{\text{eff}}^{\mu\nu}(s)$$

ove abbiamo rinominato il secondo membro come una forza effettiva. Il termine fra parentesi è lo sviluppo in serie di Taylor fino al prim'ordine di $w^\mu(s - \tau)$; si ha insomma:

$$mw^\mu(s - \tau) + O(\tau^2) = F_{\text{eff}}^{\mu\nu}(s)$$

e, rinominando $s - \tau$ con s :

$$mw^\mu(s) \approx F_{\text{eff}}^{\mu\nu}(s + \tau)$$

Un altro modo per vederlo (lo si lascia come esercizio) è risolvere la (5.4) con $\vec{E}(t) = \vec{E}\Theta(t)$. Risulta:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{e}{m} \vec{E}\Theta(t) \left(1 - e^{\frac{t}{\tau}} \right)$$

Stavolta va richiesto che $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{a}(t)$ sia finito (non nullo), e risulta:

$$\vec{a}(t) = \frac{e}{m} \vec{E} \left[e^{\frac{t}{\tau}} (1 - \Theta(t)) + \Theta(t) \right] = \frac{e}{m} \vec{E} \left[e^{\frac{t}{\tau}} \Theta(-t) + \Theta(t) \right]$$

C'è dunque un termine (quello con $\Theta(-t)$) che non è nullo quando il campo ancora “non esiste”.

La situazione, però, non è così tragica come sembra, perché i tempi per i quali avviene la violazione sono dell'ordine di τ , che come sappiamo è molto piccolo.

Insomma, formalmente l'equazione di Lorentz-Dirac crea problemi, che non sono però fisicamente così rilevanti.

Cerchiamo, dunque, di capire fino a che punto possiamo usare l'equazione di Lorentz-Dirac, ossia quando è che diventano importanti gli effetti quantistici.

Supponiamo dunque di avere un fenomeno di tempo caratteristico ΔT ; a questo corrisponde un'indeterminazione sull'energia pari a $\Delta E \sim \hbar/\Delta T$. Se ΔE è talmente grande da poter creare coppie particella-antiparticella, allora quest'incertezza non è più trascurabile, o in altre parole gli effetti quantistici non sono più trascurabili se $\Delta E \gtrsim 2m$. Quindi, quando $\Delta T \lesssim \hbar/2m$ la meccanica classica (e quindi l'equazione di Lorentz-Dirac) non è più utilizzabile.

Confrontiamo dunque ΔT con τ :

$$\Delta T \lesssim \frac{\hbar}{2m} \sim \frac{4\pi\hbar}{e^2} \frac{e^2}{6\pi m} = \frac{\tau}{\alpha}$$

ove $\alpha = e^2/4\pi\hbar$ è la cosiddetta “costante di struttura fine”; α è un numero piccolo (in particolare $\alpha \approx 1/137$). Quindi:

$$\Delta T \lesssim 137\tau$$

Pertanto, l'equazione di Lorentz-Dirac è “valida” solo per tempi molto maggiori di circa 137τ (al di sotto di questi non lo è più).

Abbiamo anche visto che per tempi molto maggiori di τ la reazione di radiazione è trascurabile: pertanto, non ha senso risolvere l'equazione di Lorentz-Dirac perché il termine $\frac{e^2}{6\pi} \frac{d\vec{a}}{dt}$ è molto piccolo (tutti questi discorsi valgono anche per l'equazione di Lorentz-Dirac nel caso relativistico). Pertanto, l'equazione di Lorentz-Dirac va risolta considerando il termine di Schott come una piccola perturbazione; in particolare, si risolve prima l'equazione senza la perturbazione, e poi la si “reinscrive”:

$$m\vec{a} \simeq e\vec{E} \xrightarrow{\text{L-D}} m\vec{a} \simeq e\vec{E} + \frac{e^2}{6\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{m} \vec{E} \right) + O(\tau^2)$$

In questo modo, i paradossi dell'equazione di Lorentz-Dirac scompaiono.

Insomma, per ricapitolare, le conseguenze paradossali dell'equazione di Lorentz-Dirac scompaiono se la si pensa come equazione approssimata.

5.2 Monopoli magnetici

5.2.1 La dualità elettromagnetica e le sue conseguenze

Nelle equazioni di Maxwell non compaiono cariche magnetiche, che peraltro non sono ancora state osservate sperimentalmente. Dal punto di vista teorico, però, ci sarebbe la forte tentazione di introdurle, perché renderebbero le equazioni di Maxwell simmetriche (in un senso che ora specificheremo) e permetterebbero di spiegare perché le cariche elettriche sono quantizzate.

Consideriamo le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

ove $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ (sono le identità di Bianchi). Queste equazioni ammettono una simmetria: se $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}$ le equazioni restano inalterate. In termini di campi, ciò equivale alle sostituzioni $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ e $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$. Questa simmetria è detta “dualità elettromagnetica”; si tratta di una simmetria discreta, che però può essere estesa a una simmetria interna:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \iff \partial_\mu (F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0 \implies F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow e^{i\varphi} (F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu}) \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

In termini di campi:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

Questa però, non è una simmetria della lagrangiana, ma solo delle equazioni (insomma, non esiste nessuna quantità conservata relativa a questa simmetria).

Se però consideriamo le equazioni di Maxwell con sorgenti, questa simmetria è rotta. Possiamo modificarle in modo da renderle simmetriche?

La risposta è affermativa; ad esempio:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_e^\nu \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = j_m^\mu$$

ove gli indici e e m stanno, rispettivamente, per “elettrico” e “magnetico”; insomma, $j_m^\mu = (\rho_m, \vec{j}_m)$, con ρ_m densità di carica magnetica e \vec{j}_m densità di corrente magnetica.

Pertanto, le equazioni sono ora simmetriche rispetto alle trasformazioni $F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow e^{i\varphi} (F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu})$ e $j_e^\mu + ij_m^\mu \longrightarrow e^{i\varphi} (j_e^\mu + ij_m^\mu)$.

Per essere precisi, volendo una teoria completamente simmetrica sotto questa trasformazione dobbiamo modificare anche l'equazione di Lorentz:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}u_\nu + g\tilde{F}^{\mu\nu}u_\nu$$

ove g è la carica magnetica. Si può verificare che il tensore energia-impulso di questa teoria è identico a quello che già conosciamo.

Dal punto di vista quantistico, però, non è evidente che questa teoria sia consistente: abbiamo infatti modificato l'identità di Bianchi, che era quella che ci permetteva di introdurre il quaripotenziale. Questo è un problema perché l'equazione di Schrodinger in un campo elettromagnetico si può esprimere *solo* in termini del quadripotenziale.

Consideriamo il caso più semplice possibile: un monopolo magnetico, ossia una carica magnetica puntiforme. Cerchiamo di capire cosa accada al quadripotenziale.

Si ha $\rho_m = g\delta^{(3)}(\vec{x})$ e $\vec{j}_m = 0$; in termini di \vec{B} ed \vec{E} , si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = g\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad \vec{E} = 0$$

Una soluzione per l'equazione in \vec{B} è (l'equazione è formalmente identica a quella di Coulomb):

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{x}}{r^3}$$

(le altre equazioni non cambiano).

Sicuramente, dunque, poiché $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$, non esisterà nessun campo \vec{A} tale che $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; tuttavia, la divergenza di \vec{B} è non nulla solo nell'origine: potremmo dunque definire \vec{A} in $D := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Il problema è che D è uno di quei domini nei quali molti risultati teorici (come il lemma di Poincaré) non si possono più applicare.

Si ha che:

$$\vec{A} = \frac{g}{4\pi} \frac{z}{r(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

è il campo che cerchiamo. In coordinate polari:

$$\vec{A} = \frac{g}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esistono due singolarità: $r = 0$ (e non ce ne dobbiamo preoccupare, perché $0 \notin D$), e $\theta = 0, \pi$. Quest'ultimo è solo un fatto matematico, che non ha senso fisico.

Ci chiediamo dunque se esistano altre soluzioni che non siano singolari.

La risposta è negativa, ma con una trasformazione di gauge si può eliminare o la divergenza per $\theta = 0$ o quella per $\theta = \pi$. Infatti, se:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \quad \lambda = \frac{g}{4\pi}\varphi = \frac{g}{4\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

allora risulta che:

$$\vec{A}' = \frac{g}{4\pi r} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

che non è più singolare in $\theta = 0$ ($\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$, quindi $\cos\theta/\sin\theta \simeq \theta$), anche se la singolarità¹ per $\theta = \pi$ permane.

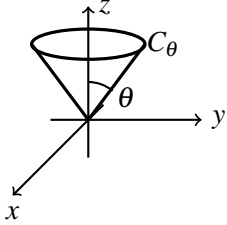
Se invece $\vec{A}'' = \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda$, si ha:

$$\vec{A}'' = \frac{g}{4\pi} \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

che stavolta è singolare in $\theta = 0$ e regolare in $\theta = \pi$.

Non è dunque possibile trovare un potenziale regolare dappertutto.

Un altro modo per vederlo è il seguente: chiamiamo C_θ la circonferenza composta dai punti di ascensione θ e \vec{A} il quadripotenziale regolare per $\theta = 0$; allora:



$$\oint_{C_\theta} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{\vec{B}} \cdot d\vec{\Sigma}$$

ove il passaggio è l'applicazione del teorema di Stokes, con S la calotta sferica “superiore” (ossia quella che sta “sopra” C_θ).

Facciamo dunque aumentare θ finché $\theta = \pi$ (se $\theta \approx \pi$, C_π è un cerchio piccolissimo attorno alla semiretta $\theta = \pi$); si ha ancora:

$$\oint_{C_\pi} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = g \neq 0$$

ove abbiamo applicato il teorema di Gauss.

Ma allora poiché la circuitazione di \vec{A} è non nulla su C_π , si ha che \vec{A} è singolare per $\theta = \pi$. Analogamente per il viceversa, ossia se consideriamo \vec{A} singolare per $\theta = \pi$.

Dunque, il meglio che possiamo fare è “coprire” D con due carte e definirci sopra un \vec{A} regolare. Ad esempio:

$$D_- = \mathbb{R}^3 \setminus \{\theta = \pi\} \longrightarrow \vec{A}' \quad D_+ = \mathbb{R}^3 \setminus \{\theta = 0\} \longrightarrow \vec{A}''$$

Nell'intersezione dei domini, \vec{A}' e \vec{A}'' sono legati dalla trasformazione di gauge $\vec{A}' - \vec{A}'' = 2\vec{\nabla}\lambda$. In termini di geometria differenziale, \vec{A} è la sezione di un fibrato non banale.

5.2.2 La quantizzazione delle cariche

Cerchiamo ora di scrivere l'equazione di Schroedinger di una particella in moto in presenza di un quadripotenziale \vec{A} .

L'equazione di Schroedinger per una particella libera è:

$$\frac{p^2}{2m} \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

¹Le semirette $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ sono dette “stringhe di Dirac”.

Se la lagrangiana del sistema è $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, il momento coniugato a x è $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$.

Nel caso quantistico, $[x, p] = i\hbar$, se p è il momento coniugato a x . Dunque, p può essere rappresentato come $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, e perciò:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Con un campo elettromagnetico, la lagrangiana del sistema diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - eA_i\dot{x}^i$$

e quindi il momento coniugato a x è:

$$p^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}^i - eA^i$$

che, in meccanica quantistica, si rappresenta come $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$. In questo caso, l'hamiltoniana del sistema è:

$$\begin{aligned} H = p \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2m}(p^i + eA^i)^2 = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} + i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\right)^2 \end{aligned}$$

Quindi, l'equazione di Schroedinger per una particella in moto in un campo elettromagnetico è:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} + i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\right)^2 \psi$$

Affinché quest'equazione sia invariante di gauge, si devono effettuare le trasformazioni $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$, $\psi \rightarrow \psi e^{-ie\frac{\lambda}{\hbar}}$.

In D_+ , dunque, ci sarà una soluzione ψ' dell'equazione di Schroedinger, e in D_- un'altra ψ'' ; nell'intersezione si ha $\psi'' = \psi' e^{-ie\frac{\lambda}{\hbar}2\lambda}$. Poiché $\lambda = \frac{g}{4\pi}\varphi$, allora le soluzioni devono essere periodiche in φ , ossia invarianti sotto $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$: in particolare, anche l'esponentiale deve esserlo. Si ha perciò:

$$e^{-ie\frac{g}{\hbar}2\frac{g}{4\pi}\varphi} = e^{-ie\frac{g}{\hbar}2\frac{g}{4\pi}(\varphi+2\pi)} \Rightarrow \frac{eg}{2\pi\hbar} = n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Questa condizione, che rappresenta la quantizzazione delle cariche (elettriche e magnetiche), è detta "condizione di quantizzazione di Dirac".

Come anticipato, l'esistenza delle cariche magnetiche giustifica la quantizzazione delle cariche elettriche.