

# Appunti del corso di Fisica Moderna

Francesco Addari

Università degli Studi di Padova

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2016-2017

# Premessa

Questo documento contiene gli appunti del corso di Fisica Moderna tenuto dal professor Marchetti presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei" dell'Università degli Studi di Padova durante l'anno accademico 2016-2017. Gli appunti delle lezioni qui trascritti sono opportunamente rielaborati dal sottoscritto, ad esempio, potrebbero non seguire perfettamente lo stesso ordine seguito dal professore. Questo è dovuto semplicemente al fatto che ho scritto questi appunti in preparazione dell'esame e per simultaneamente esercitarmi in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, e dunque ho riorganizzato e rielaborato nel modo in cui per me è più congeniale.

Voglio precisare ancora una volta che questi appunti sono una mia rielaborazione, non revisionata dal professor Marchetti, dunque non escludo che ci possano essere degli errori nel documento e il professore non ha nessuna responsabilità sul contenuto. Inoltre non vogliono essere una sostituzione delle lezioni del professore, o di altri appunti scritti da altri studenti, ma più una visione alternativa che può essere d'aiuto a capire i concetti. Dunque consiglio prima di tutto di seguire le lezioni, e magari consultare questo documento e altri appunti per un ulteriore punto di vista.

*Padova, Agosto 2017*  
Francesco Addari

# Indice

<b>I</b>	<b>Relatività Speciale</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Introduzione storica</b>	<b>2</b>
1.1	Relatività Galileiana . . . . .	3
1.2	Crisi della Relatività Galileiana . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le basi della Relatività Speciale</b>	<b>7</b>
2.1	Contrazione di Fitzgerald-Lorentz . . . . .	7
2.2	Non covarianza dell'Elettromagnetismo . . . . .	8
2.3	Dilatazione dei tempi . . . . .	10
2.4	Postulati della relatività speciale . . . . .	12
2.5	Conseguenze dei postulati . . . . .	13
2.5.1	Relatività della simultaneità . . . . .	13
2.5.2	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	17
2.6	Relativo e assoluto . . . . .	20
2.6.1	Composizione delle velocità . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Formulazione covariante</b>	<b>26</b>
3.1	Invarianza di $ds^2$ . . . . .	26
3.2	Gruppo di invarianza di $ds^2$ . . . . .	30
3.2.1	Ulteriore derivazione delle trasformazioni di Lorentz . . . . .	34
3.3	Formalismo naturale della relatività speciale . . . . .	35
3.3.1	Algebra Tensoriale . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Meccanica Relativistica</b>	<b>43</b>
4.1	Cinematica e dinamica . . . . .	43
4.2	Decadimenti . . . . .	46
4.2.1	Decadimento a due corpi $M \longrightarrow m_1 + m_2$ . . . . .	48
4.2.2	Caso $m_1 = m_2$ . . . . .	51
4.2.3	Distribuzione di probabilità del decadimento . . . . .	57
4.3	Urti . . . . .	58
4.3.1	Urti elastici . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Elettromagnetismo</b>	<b>64</b>
5.1	Equazioni di Maxwell . . . . .	64
5.2	Trasformazioni del tensore elettromagnetico . . . . .	68
5.3	Moto di particelle in campo elettromagnetico . . . . .	71
5.3.1	Moto in campo elettrico . . . . .	71

5.3.2	Moto in campo magnetico . . . . .	73
5.4	La carica elettrica . . . . .	74
5.5	Teoria delle distribuzioni . . . . .	76
5.6	La quadricorrente . . . . .	79
5.7	Effetto doppler relativistico . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Esercizi</b>	<b>82</b>
<b>II</b>	<b>Fisica quantistica</b>	<b>104</b>
<b>7</b>	<b>Crisi della fisica classica</b>	<b>105</b>
7.1	Introduzione . . . . .	105
7.2	Descrizione matematica di un sistema fisico . . . . .	107
<b>8</b>	<b>Esperimenti che portano alla crisi</b>	<b>114</b>
8.1	Il corpo nero . . . . .	114
8.2	Effetto fotoelettrico ed effetto Compton . . . . .	121
<b>9</b>	<b>La teoria quantistica</b>	<b>124</b>
9.1	Spettroscopia . . . . .	124
9.2	Regola di commutazione di Heisemberg . . . . .	135
9.2.1	Evoluzione temporale . . . . .	139
9.3	Meccanica ondulatoria . . . . .	140
9.3.1	Tesi di de Broglie . . . . .	140
9.3.2	L'equazione di Schrödinger . . . . .	143
9.3.3	Valori medi delle osservabili . . . . .	152
9.4	Esempi . . . . .	157
9.4.1	Particella in scatola unidimensionale . . . . .	157
9.4.2	Particella in scatola tridimensionale . . . . .	158
9.4.3	Decadimenti ed effetto tunnel . . . . .	159
9.5	Lo spin . . . . .	164
9.6	Particelle identiche . . . . .	168

# Parte I

## Relatività Speciale

# Capitolo 1

## Introduzione storica

La **Relatività Speciale** (o *Ristretta*) è una teoria che risolve la crisi di inizio '900 dei tentativi di fusione tra Meccanica Classica (di Newton, che d'ora in poi abbrevierò in MC) e dell'Elettromagnetismo (di Maxwell, abbreviato in EM). Il problema fondamentale di quest'ultimo era che non risultava essere covariante rispetto alla *Relatività Galileiana*. Questa congiunzione porta a una modifica della concezione di spazio e tempo fino a quel tempo assodata e radicata nella mente umana.

La prima idea di spazio e tempo si può far risalire ad Aristotele. Riteneva che il tempo fosse **assoluto**, ossia indipendente dall'osservatore e dalla materia. È una successione continua di istanti a ciascuno dei quali corrisponde uno spazio in cui anche le posizioni dei punti sono assolute.

In pratica riteneva che si potesse identificare univocamente un punto nello spazio a istanti successivi.<sup>1</sup>

Questa assunzione implica che la fisica di un corpo fermo è distinguibile da quella di un corpo con velocità uniforme, e che la velocità è assoluta. Si prenda l'esempio di un treno che viaggia a velocità uniforme di 100 km/h, e una palla che cade dal soffitto della carrozza. Secondo questo concetto di spazio e tempo, un osservatore fermo fuori dal treno e uno al suo interno, vedranno diversamente la caduta della palla, poiché ha posizione e istante di tempo univoci. Dovrà quindi accadere che l'osservatore sul treno vede la palla cadere "storta", come in moto parabolico, mentre l'osservatore fermo vedrà la palla cadere dritta verso il suolo.<sup>2</sup>

Aristotele ipotizzò che  $F \propto v$ . Si immagini infatti una nave che si muove grazie a un numero  $n$  di rematori, questa andrà a una velocità  $v$ . Se si raddoppia il numero di rematori, è intuitivo convincersi che la nave si muova ora di velocità  $2v$ . Raddoppiando quindi la forza, si raddoppia la velocità.

---

<sup>1</sup>Due osservatori in due sistemi di riferimento diversi devono vedere la stessa cosa.

<sup>2</sup>Questo ovviamente non accade, un concetto più realistico è introdotto proprio da Galileo, e se ne parlerà nel seguito.

## 1.1 Relatività Galileiana

La crisi della concezione Aristotelica si ebbe quando Galileo e Copernico capirono che la Terra orbita intorno al Sole a una velocità allora stimata di 1.5 Km/s (in realtà  $v \sim 30 \text{ Km/s}$ ). Gli Aristotelici obiettarono poiché, per la loro concezione di spazio e tempo, se la Terra si muove allora i sassi non possono cadere dritti (si ricordi l'esempio del treno).

Nel *Dialogo dei Massimi Sistemi* (1632) Galileo risponde immaginando degli esperimenti nella sotto-coperta di una nave che si muove di moto rettilineo uniforme, molto simili all'esempio del treno fatto precedentemente.

Per Galileo dunque la velocità non è assoluta, quindi la  $F \propto a$ . Inoltre enuncia la cosiddetta Relatività Galileiana: *In tutti i sistemi di riferimento (SDR) che si muovono di moto rettilineo uniforme (rispetto a un altro, chiaramente) le leggi della fisica hanno la stessa forma.*

Questo principio introduce quindi l'impossibilità di un SDR privilegiato, uno spazio assoluto, quindi le posizioni sono relative a un preciso SDR; inoltre lo spazio è pensato come *omogeneo* e *isotropo*, dunque non ci sono direzioni privilegiati rispetto alle quali definire la velocità. La direzione temporale invece rimane assoluta per tutti gli osservatori

Su queste intuizioni si basa la MC di Newton, che chiama gli SDR fermi o che si muovono di moto uniforme **inerziali**, ossia in cui vale il principio di inerzia.

### Leggi di trasformazione di Galileo

Siano ora  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  due sistemi di riferimento, il secondo che si muove con  $\vec{v}$  rispetto al primo. Preciso che indicherò ogni quantità relativa a  $\mathcal{S}'$  con l'apice. Inoltre le origini  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}'$  coincidono all'istante di tempo iniziale  $t_0 = t'_0 = 0$ . Allora le leggi <sup>3</sup> da usare per passare dalle coordinate (cartesiane) del sistema  $\mathcal{S}$  alle coordinate (sempre cartesiane) del sistema  $\mathcal{S}'$  sono:

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta t' = \Delta t \\ |\Delta \vec{x}'| = |\Delta \vec{x}| \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo la prima equazione del sistema si può facilmente dedurre la *legge di addizione delle velocità*, che mette in evidenza la non absolutezza della velocità e la non esistenza di un limite al valore che  $\vec{v}$  può assumere in modulo.

## 1.2 Crisi della Relatività Galileiana

Nel XIX secolo l'esperimento di Young evidenzia la natura ondulatoria della luce, e rende necessaria l'esistenza di un mezzo in cui si possa propagare<sup>4</sup>. Inoltre le equazioni di Maxwell dicono chiaramente che le onde elettromagnetiche si propagano con la stessa

<sup>3</sup>Si omette la dimostrazione, che si dovrebbe aver già visto nel corso di Fisica Generale 1.

<sup>4</sup>Si pensava che affinché le onde possano propagarsi fosse necessario un mezzo.

velocità  $c$  in tutti i SDR. Per spiegare questi due fatti e anche che le equazioni di Maxwell, sotto una trasformazione di Galileo, non assumono la stessa forma nei due SDR, si suppone l'esistenza di un SDR privilegiato, il cosiddetto **etere**.

La relatività galileiana entra dunque in crisi con quest'idea, poiché sosteneva che non potesse esistere un SDR privilegiato rispetto agli altri. Si cercò quindi di cercare delle evidenze sull'esistenza dell'etere.

Un esperimento che sembra confermare l'esistenza di questo fantomatico mezzo è l'**aberrazione della luce**, un effetto dovuto alla velocità con cui si muove la Terra e al fatto che la velocità della luce è finita.

Si immagini voler osservare una stella che si trova allo zenit. Sia  $L$  la lunghezza del telescopio, e  $v$  la velocità della Terra. Se il telescopio viene messo perpendicolare a terra, il raggio emesso dalla stella non arriva all'oculare, poiché nel tempo  $t$  in cui il raggio ha percorso la lunghezza  $L$  del telescopio, si è spostato di una lunghezza  $vt$ .

Bisogna quindi inclinare il telescopio (come in *figura 1.1*) in modo tale il tempo  $t$  impiegato dalla luce a percorrere il tratto  $L \sin \alpha = ct$  sia lo stesso impiegato dall'oculare a percorrere il tratto  $L \cos \alpha = vt$ .

Dunque si evince che

$$\frac{v}{c} = \cot \alpha \sim 10^{-4} \quad \text{sperimentalmente}$$

e si ricava il valore della velocità della Terra

$$v \sim 10^{-4}c = 30 \text{ Km/s}$$

Il valore ottenuto dall'esperimento è circa quello già conosciuto, dunque il fatto che esista un modo per stimare la velocità della Terra implica che è possibile trovare un sistema di riferimento privilegiato rispetto al quale la Terra si muove, l'etere appunto.

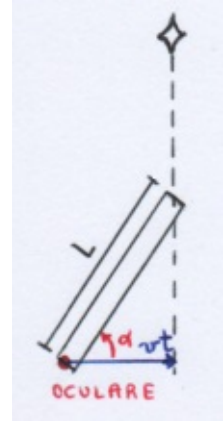


Figura 1.1:

L'esperimento (più famoso, forse) che è una prova della non esistenza dell'etere è quello di **Michelson-Morley**. L'idea di fondo è essenzialmente la seguente: ammettendo che l'etere esista e che valga la legge di addizione delle velocità, supponiamo di avere un razzo che si muove di velocità  $v$ . Se questo razzo emette un raggio di luce, quest'ultima che si muove di velocità  $c$  rispetto all'etere, allora un osservatore solidale al razzo deve vedere la luce con velocità  $c' = c - v$ . Michelson e Morley (1881-1887) usarono come razzo la Terra stessa, costruendo l'interferometro mostrato in *figura 1.2*.

In questo caso sia  $v = 30 \text{ Km/s}$  la velocità della Terra rispetto all'etere. Siccome il tempo è assoluto allora posso calcolare gli intervalli temporali sia rispetto all'etere che rispetto al SDR del laboratorio (denotato lab nel seguito).

Il raggio emesso dalla sorgente  $S$  incide su una superficie semi-riflettente  $M$  producendo il raggio rifratto 1 e il raggio riflesso 2, che vanno rispettivamente ad incidere sugli specchi  $S_1$  ed  $S_2$  e sono riflessi di nuovo verso  $M$ . Si analizza dunque l'interferenza dei raggi nuovamente rifratti 1 e 2 con il rivelatore  $R$ .

Nel tratto  $MS_1$  il raggio di luce ha all'andata velocità  $c - v$  e al ritorno velocità  $c + v$ . Dunque il tempo di percorrenza, calcolato nel lab:

$$T_1 = \frac{L_1}{c - v} + \frac{L_1}{c + v} = \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



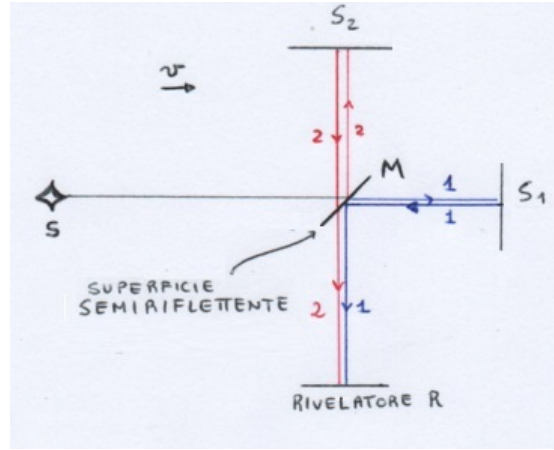


Figura 1.2: L'interferometro utilizzato da Michelson e Morley

Il tempo  $T_2$  conviene invece calcolarlo nell'etere, rispetto al quale il raggio 2 segue la traiettoria raffigurata in [figura 1.3](#).

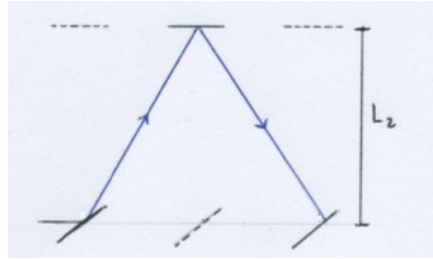


Figura 1.3: Traiettoria vista da un osservatore solidale all'etere

La distanza tra il "primo specchio" e lo "specchio tratteggiato" è chiaramente  $vt_2$  con  $2t_2 = T_2$ . Dunque per il teorema di Pitagora:

$$(ct_2)^2 = (vt_2)^2 + L_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{L_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si può calcolare quindi la differenza tra  $T_1$  e  $T_2$ :

$$\Delta T_{1,2} = \frac{2}{c} \cdot \left( \frac{L_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{L_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Si può fare lo stesso procedimento dopo aver ruotato di  $90^\circ$  (in senso orario, per esempio) l'apparato, ossia scambiando fisicamente il ruolo di  $L_1$  e  $L_2$ .

$$\Delta T'_{1,2} = \frac{2}{c} \cdot \left( \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

É quindi evidente che i due intervalli temporali sono diversi. Dunque ci si aspetta che le frange di interferenza non siano nella stessa posizione nelle due diverse configurazioni. Il prodotto di frequenza per lo sfasamento temporale (in una delle due configurazioni) coincide con la posizione della frangia. Dunque, avendo  $L_1 = L_2 = 11 \text{ m}$ , ci si aspettava uno spostamento pari:

$$\Delta n = \frac{c}{\lambda} \cdot (\Delta T'_{1,2} - \Delta T_{1,2}) \sim 0.4$$

La precisione dell'esperimento consentiva di rivelare anche uno spostamento di frangia di  $10^{-3}$ , ma le frangie non si sono spostate entro questa sensibilità. Dunque l'esperimento rigetterebbe l'ipotesi dell'esistenza dell'etere, piuttosto sarebbe una prova del fatto che la velocità della luce è la stessa nei percorsi di andata e ritorno.

## Capitolo 2

# Le basi della Relatività Speciale

### 2.1 Contrazione di Fitzgerald-Lorentz

L'esperimento sull'aberrazione conferma l'ipotesi di esistenza dell'etere, mentre l'esperimento di Michelson-Morley nega questa possibilità. È possibile trovare una soluzione che non contraddica nessuno dei due esperimenti?

Una soluzione viene proposta da **Fitzgerald** nel 1889: l'esperimento di MM è spiegato se le distanze si contraggono di un fattore  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  nella direzione del moto rispetto all'etere. In questo modo infatti  $T_1$  e  $T_2$  sono uguali, dunque in entrambe le configurazioni (iniziale e dopo aver ruotato di  $90^\circ$ ) non si ha uno spostamento di frange di interferenza.

La stessa idea venne proposta da **Lorentz** in due tempi tra il 1892 e il 1899, e l'effetto è appunto chiamato **contrazione di Fitzgerald-Lorentz**.

Da dove viene quest'audace idea? Si pensi al campo elettrico di una carica (negativa o positiva) ferma, e quello di della stessa carica in movimento.

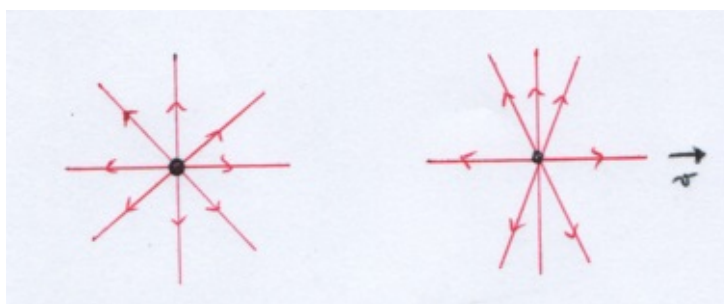


Figura 2.1: A dx le linee di forza del campo di una carica (positiva) ferma. A sx lo stesso ma la carica è in movimento.

Come si può vedere dalla *figura 2.1* le linee di forza sono contratte nella direzione del moto. Quindi se la materia è composta da particelle cariche, perché non dovrebbe contrarsi ciò che le cariche compongono in scala macroscopica?

## 2.2 Non covarianza dell'Elettromagnetismo

Nel frattempo Lorentz e Larmor ri-analizzano la simmetria delle equazioni di Maxwell e trovano che campo elettrico  $\vec{E}$ , campo magnetico  $\vec{B}$ , potenziale elettrico  $\phi$  e potenziale magnetico  $\vec{A}$  soddisfano l'equazione delle onde. Consideriamo ad esempio  $\phi(x, t)$ , vogliamo allora passare da un SDR  $\mathcal{S}$  a uno  $\mathcal{S}'$ , quest'ultimo che si muove di velocità  $v$  solo in direzione  $x$  rispetto al primo. Consideriamo allora la trasformazione di Galileo:

$$\begin{cases} x' = x - \beta ct \\ ct' = ct \end{cases} \quad (2.1)$$

Dove  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Abbiamo detto che è valida l'equazione delle onde per il potenziale elettrico:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, ct)}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, ct)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

Controlliamo ora se l'equazione delle onde assume la stessa forma in  $\mathcal{S}'$ . Immaginiamo allora che  $\phi(x, ct) = \phi(x'(x, ct), ct'(x, ct))$  cioè che il potenziale sia funzione di due variabili di  $\mathcal{S}'$ , che a loro volta sono entrambe funzioni di due variabili di  $\mathcal{S}$ , legate proprio dalla 2.1. Allora ogni volta che si deriva rispetto a  $x$  o  $ct$  bisogna tenere conto della composizione, seguendo la regola della catena <sup>1</sup>.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial ct'}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial ct'} \stackrel{2.1}{=} \frac{\partial \phi}{\partial x'} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial ct} = \frac{\partial x'}{\partial ct} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial ct'}{\partial ct} \frac{\partial \phi}{\partial ct'} \stackrel{2.1}{=} -\beta \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial ct'} \quad (2.4)$$

Osservo che le derivate parziali saranno anch'esse delle funzioni  $f(x, ct) = f(x'(x, ct), ct'(x, ct))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &\stackrel{2.3}{=} \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &\stackrel{2.1}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct)^2} &\stackrel{2.4}{=} \frac{\partial}{\partial ct} \left( -\beta \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial ct'} \right) \\ &= -\beta \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial ct} + \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial ct'}}{\partial ct} \end{aligned} \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Il calcolo è assai noioso, come si vede

Ora svolgo separatamente i due addendi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial ct} &= \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial ct} \\ &\stackrel{2.1}{=} -\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x'}}{\partial ct'} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial ct'}}{\partial ct} &= \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial ct'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial ct'}}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial ct} \\ &\stackrel{2.1}{=} -\beta \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial ct'}}{\partial x'} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct')^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Siccome  $\phi$  è una bellissima funzione derivabile almeno due volte con derivata continua, vale il teorema di Schwartz, quindi le derivate miste sono uguali! Allora posso scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct)^2} &= -\beta \left( -\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct') \partial x'} \right) + -\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct') \partial x'} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct')^2} \\ &= \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct') \partial x'} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct')^2} \\ &= \left( -\beta \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial ct'} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si voglia notare che l'ultimo quadrato è un quadrato "formale".

Infine sommiamo i vari pezzi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left( -\beta \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial ct'} \right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \\ &\neq \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct')^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Evidentemente l'equazione delle onde non assume la stessa forma nel nuovo SDR. Questo fa pensare che ci sia qualcosa che non vada nella relatività galileiana, poiché le leggi dell'EM in qualche modo non la rispettano.

Proviamo a mettere in discussione l'assolutezza del tempo, e consideriamo le trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = x - \beta ct \\ ct' = ct - \beta x \end{cases} \quad (2.11)$$

Ora il procedimento è il medesimo seguito prima, solamente che quando si deriva si considerano le relazioni del sistema 2.11, dunque cambiano i valori di alcune derivate. Passando direttamente al risultato finale:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left( -\beta \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial ct'} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x'} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial (ct)'} \right)^2 \\
&= (1 - \beta^2) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct')^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Come si può notare ora le due equazioni d'onda hanno praticamente la stessa forma a meno del fattore  $(1 - \beta^2)$ . A posteriori possiamo dire che le trasformazioni "corrette" da utilizzare per il passaggio da  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{S}'$  sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \tag{2.13}$$

Con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . Le trasformazioni 2.13 sono note come **trasformazioni di Lorentz** lungo l'asse  $x$ ; lo stesso Lorentz però non accetta l'idea che il tempo non sia assoluto, affermando che la relatività del tempo introdotta dalle sue trasformazioni sia un *tempo fittizio*, solamente un artificio matematico per far tornare i conti.

## 2.3 Dilatazione dei tempi

Considerando la contrazione di FL, l'esperimento di MM risulterebbe spiegato, poiché i tempi di andata e ritorno per il raggio 1 e il raggio 2 sono gli stessi, in entrambe le configurazioni; questo implica che girando l'apparato la differenza tra  $T_1$  e  $T_2$  è la stessa ed è identicamente nulla. Se però si riesce a spiegare l'esperimento, vuol dire che le assunzioni fatte sono corrette, dunque vale che:

$$T_1 = T_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ (nel lab)} \neq \frac{2L}{c} \text{ (nell'etere)} \tag{2.14}$$

Misurando però  $T_1$  (o  $T_2$ ) è chiaro che posso risalire alla velocità della Terra, misurando nel sistema di riferimento del laboratorio. Se si considera che il tempo è assoluto, allora lo è anche la velocità così ricavata! Quindi il risultato è contro l'impossibilità di trovare un SDR privilegiato.

É necessario che l'assolutezza dei tempi sia messa in discussione. La 2.14 suggerisce di considerare l'idea che i tempi siano dilatati passando da un SDR a un altro, poiché si vede che il l'intervallo di tempo nell'etere è più piccolo di quello calcolato nel laboratorio.

Nel 1898 **Poincaré** critica l'idea del tempo assoluto. É convinto che le trasformazioni di Lorentz abbiano un significato ben più profondo del solo artificio matematico atto a mantenere la simmetria aspettata e vuole cercare di trovare un modo per capire se due eventi (intesi come punti nello spazio) sono simultanei. Chiamiamo i due eventi  $P_1$  e  $P_2$ , e la loro distanza  $L$ . Si pone innanzitutto il problema della sincronizzazione degli orologi nei due punti nello spazio presi in considerazione. Si immagini allora di inviare un segnale (luminoso, ad esempio) da  $P_1$  a  $P_2$  e diciamo che è partito quando l'orologio segna una ben

precisa ora (per esempio, le 9:00:00). Allora il nostro scopo è quello di calcolare il tempo  $t$  impiegato a percorrere  $L$ , così da poter sincronizzare l'orologio in  $P_2$  ponendo l'ora di arrivo uguale a quella di partenza + il tempo  $t$ . Siamo però entrati in un circolo vizioso: per poter misurare  $t$ , abbiamo bisogno della velocità del segnale, che, senza assumere nulla, è necessario che la calcoliamo nel SDR di  $P_2$ . Ma per trovare la velocità ho bisogno di misurare il tempo, sempre in  $T_2$ . In pratica l'obiettivo dell'esperimento necessita di se stesso per poter trovare una qualche validità.

Comunque convinto dell'esistenza dell'etere, nel 1904 Poincaré arriva a enunciare il **principio di relatività**<sup>2</sup> *Tutte le leggi fisiche devono avere la stessa forma nei sistemi di riferimento inerziali*, incluso l'elettromagnetismo.

Poincaré e Lorentz ragionano e traggono le conclusioni cercando di spiegare l'esperimento di Michelson-Morley, invece **Einstein** ragiona (a quanto affermò) senza essere influenzato da questo.

**Idea di Einstein** per spiegare la dilatazione dei tempi (1905): consideriamo un "orologio-luce", composto da due specchi disposti parallelamente e un raggio che viene continuamente riflesso tra di essi. Imponiamo che il tempo impiegato per fare andata e ritorno sia 1 secondo (figura 2.2).

Consideriamo ora un orologio identico su un razzo che si muove di velocità  $v$  rispetto al primo orologio, e consideriamo che ci siano due osservatori solidali rispettivamente al primo e al secondo orologio. Sulla lunghezza  $L$  tra i due specchi entrambi concordano, poiché il razzo si muove ortogonalmente ad essa. Supponiamo infine che la luce abbia velocità finita  $c$  in tutti i SDR inerziali. Cosa vede l'osservatore fermo, guardando l'orologio sul razzo? Poiché quest'ultimo si muove vedrà che il raggio compie una traiettoria a "zig-zag" come mostrato in figura 2.3.

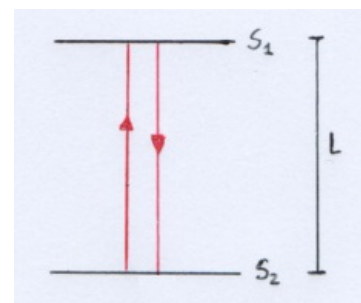


Figura 2.2: L'orologio-luce

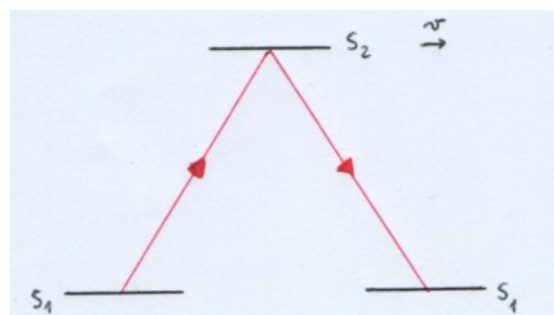


Figura 2.3: L'orologio-luce sul razzo visto dall'osservatore fermo

Allora l'osservatore solidale al razzo dirà che il suo orologio ha misurato 1 secondo dopo che ha compiuto andata-ritorno, quindi una lunghezza  $2L$ . Invece l'osservatore fermo, siccome la luce ha sempre velocità  $c$  non può dire ugualmente! Per lui infatti il raggio, nel compiere il tragitto di andata-ritorno, ha percorso una lunghezza evidentemente maggiore di  $2L$ , dunque è passato più di 1 secondo. Quindi l'osservatore fermo vede il tempo dilatato. Si noti che lo stesso ragionamento potrebbe farlo l'osservatore sul razzo guardando l'orologio dell'altro osservatore.

<sup>2</sup>Lo stesso che enuncia Einstein soltanto un anno dopo

## 2.4 Postulati della relatività speciale

Le stesse conclusioni a cui arriva Einstein (1905) sono ottenute anche da Poincaré un anno prima, ma quest'ultimo ragiona pensando che l'etere esista, ma il moto rispetto ad esso sia **irrilevabile**, non postulando inoltre la costanza della velocità della luce. Parte infatti dal principio di relatività, utilizza le trasformazioni di Lorentz, con il fattore di contrazione  $\gamma$ , e ottiene l'invarianza delle equazioni di Maxwell, postulando che le trasformazioni utilizzate siano quelle corrette. Suggerisce inoltre una fusione di spazio e tempo che poi sarà ripresa da **Minkowski**.

Il lavoro che fa Einstein è più rivoluzionario (e diretto, se vogliamo) ed enuncia i postulati come segue:

- Omogeneità dello spazio e del tempo (+isotropia dello spazio)
- Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali
- La velocità della luce nel vuoto è costante in ogni sistema di riferimento inerziale ed è uguale a  $c$

Da questo trova le trasformazioni di Lorentz e si pone fermamente contro l'esistenza dell'etere, enfatizzando la sua non fisicità. Postulando la velocità della luce però, bisogna rivedere il concetto di spazio e tempo e infatti vi è una connessione più stretta tra di essi. Passando da un SDR a un altro, non si conservano più gli intervalli spaziali e gli intervalli temporali, ma la quantità

$$\Delta s = c\Delta t - \Delta x$$

che è detta appunto intervallo spazio-temporale. Le conclusioni paiono assurde: nessuno di noi direbbe che, ad esempio, una sbarra di metallo di lunghezza  $L$  (prima ferma) varia la sua lunghezza se la vediamo viaggiare su un camion a velocità  $v$ . Però Einstein è fermamente convinto che l'intuizione non è giustificabile a priori. Viene da sé la seguente domanda: è possibile misurare in un SDR fermo una lunghezza che è solidale a un SDR in movimento rispetto al primo<sup>3</sup>?

### Idea di validità della formula $E = mc^2$

Nello stesso lavoro in cui Einstein enuncia i postulati della relatività speciale, dà anche una "dimostrazione" di validità della famosa formula (come se avesse fatto solo quello) che mette in relazione massa ed energia.

Consideriamo dapprima due sorelle gemelle entrambe di massa  $m$ , su una barca che si passano un pallone (di massa  $\delta m$ ) con le mani. Quando la prima lancia la palla alla seconda, siccome la barca era ferma, la barca rincula al fine da tenere il centro di massa del sistema nella stessa posizione, perché la quantità di moto<sup>4</sup> si deve conservare e rimanere nulla.

<sup>3</sup>Si noti che non vi sono ambiguità nei riferimenti. Si vuole misurare nel **SDR fermo** qualcosa che sta nel **SDR in movimento**.

<sup>4</sup>Utilizzerò anche il termine **momento** per riferirmi alla quantità di moto



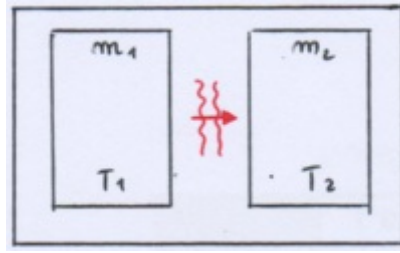


Figura 2.4:

Consideriamo ora un sistema completamente isolato costituito da due corpi 1 e 2 (come in figura 2.4), identici (stessa forma, stessa massa) ma con temperatura  $T$  diversa. Supponiamo per esempio  $T_1 > T_2$ . Questo è come dire che i due corpi hanno diversa energia, precisamente  $E_1 > E_2$ . Vediamo che 1 trasferisce parte della sua energia a 2 sotto forma di radiazione elettromagnetica. La radiazione elettromagnetica ha momento pari a  $|\vec{p}| = p = \frac{E}{c}$ , allora per la conservazione del momento il baricentro acquisisce una quantità di moto di modulo pari ma verso opposto: quindi il sistema (e il centro di massa) si è spostato! Chiaramente questo risultato è assurdo, ma allora dove sta l'errore? L'errore è stato nello assumere che i due corpi (fermi) avessero stessa massa ma diversa energia. Se ricordiamo l'esempio delle due gemelle, i "poli" del sistema non avevano ugual massa, poiché il pallone ha una massa pari a  $\delta m$ , dunque anche se la barca si sposta, ciò non accade per il CM poiché c'è un continuo "scambio di massa". Possiamo però associare, nel caso del sistema a due corpi identici, una massa  $\delta m$  alla radiazione elettromagnetica, pari a

$$\delta m = \frac{p}{c} = \frac{E}{c^2} \quad \Rightarrow \quad E = \delta m \cdot c^2$$

In questo modo il sistema è analogo alla situazione delle due gemelle, e abbiamo trovato che l'energia è direttamente proporzionale alla massa.

## 2.5 Conseguenze dei postulati

### 2.5.1 Relatività della simultaneità

Ci poniamo ora il problema di capire quando due eventi A e B sono simultanei. Introduciamo innanzitutto, invece della coordinata temporale  $t$ , la coordinata spaziale  $ct$ . In quanto  $c$  è assoluta, non c'è alcun tipo di ambiguità e si può vedere come un semplice riscaldamento. Un **evento** sarà quindi caratterizzato, in coordinate cartesiane e in un SDR  $\mathcal{S}$ , dalla coppia  $(ct, \vec{x})$ <sup>5</sup>.

Se  $c$  è assoluta, si può definire il processo di simultaneità, perché possiamo usarla per misurare i tempi. Consideriamo  $\mathcal{S}'$  e tre punti a lui solidali,  $A'$ ,  $B'$  e  $O'$  a metà tra i primi due come in figura, e poniamo un osservatore in ciascuno di essi.

In  $\mathcal{S}'$  un raggio di luce parte da  $O'$  e raggiunge **simultaneamente**  $A'$  e  $B'$ . L'equazione del raggio, poiché la luce ha velocità  $c$ , è chiaramente  $x' = \pm ct'$ , dunque una retta

<sup>5</sup>Per semplicità, tanto non cambia granché, ci poniamo con una sola dimensione spaziale, quindi d'ora in poi mi dimenticherò di scrivere il simbolo di vettore su  $x$ .

con inclinazione di  $45^\circ$  nel piano di assi  $ct'$  e  $x'$ . Siccome invece gli osservatori nei punti considerati sono fermi, la loro equazione è  $x = \text{costante}$ . Si può allora definire l'**asse di simultaneità** come il collegamento degli eventi 1 e 2, definiti come intersezione della retta del raggio di luce con quelle dell'evoluzione temporale dei due osservatori solidali, come si può vedere nella figura 2.5 sottostante.

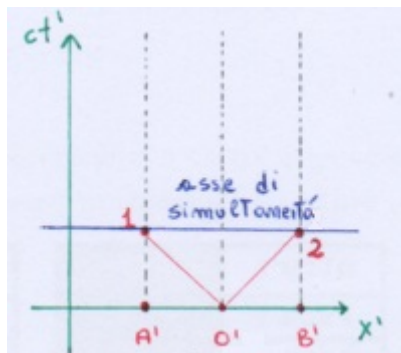


Figura 2.5: L'asse di simultaneità di  $S'$  in  $S'$

Traiamo dunque le conclusioni:

- L'asse temporale è parallelo all'evoluzione temporale di osservatori solidali;
- L'asse di simultaneità ("presente") è parallelo all'asse spaziale <sup>6</sup>.

Consideriamo ora  $S$  rispetto al quale  $S'$  si muove con velocità  $v > 0$  nella sola direzione  $x$ . Un osservatore solidale a  $S$  come vede gli assi di  $S'$ , e in particolare quello di simultaneità? Stavolta gli osservatori si trovano in  $A'$  e  $B'$  a  $t = 0$ <sup>7</sup> ma il loro evoluto temporale in  $S$  non è più una retta parallela all'asse  $ct$ , poiché hanno una velocità non nulla. L'equazione sarà infatti  $x = vt$ , mentre per i raggi la luce, data l'assolutezza di  $c$ , sarà ancora  $x = \pm ct$ . Allora riseguendo gli stessi passaggi per tracciare l'asse di simultaneità di  $S'$  visto da  $S$ , si può ben notare (figura 2.6) che non è più parallelo all'asse spaziale  $x$ .

Gli eventi 1 e 2 non sono più simultanei in  $S$ , come lo erano in  $S'$ , al contrario di quanto ci dice l'intuizione! Cambiando sistema di riferimento, può anche cambiare la successione temporale di due eventi.

Quale sarebbe stato il grafico in fisica non relativistica? In questo caso, avremmo dovuto tenere conto che  $c$  non è assoluta e applicare la composizione delle velocità: il raggio diretto ad  $A'$  ha velocità  $c - v$ , mentre il raggio diretto a  $B'$  ha velocità  $c + v$ <sup>8</sup>.

Le rette dei raggi hanno quindi diversa inclinazione, tale che gli eventi 1 e 2 giacciono su una retta parallela all'asse delle  $x$ , come si vede nella figura 2.7:

Allora possiamo dire in generale che:

- L'asse di simultaneità di un SDR è sempre parallelo al suo asse spaziale  $x$ .

<sup>6</sup>In 3-dim avremmo avuto uno "spazio di simultaneità".

<sup>7</sup>Attenzione:  $t$  è il tempo in  $S$ .

<sup>8</sup>Ricordo che i raggi hanno velocità  $c$  in  $S'$

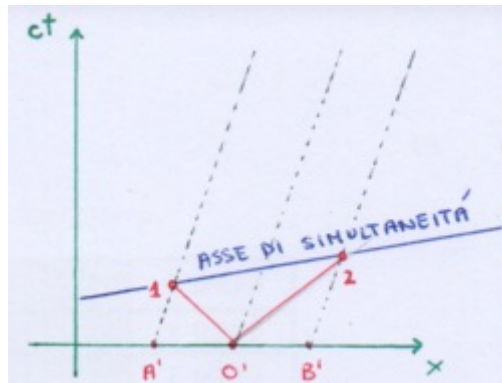


Figura 2.6: L'asse di simultaneità di  $\mathcal{S}'$  in  $\mathcal{S}$

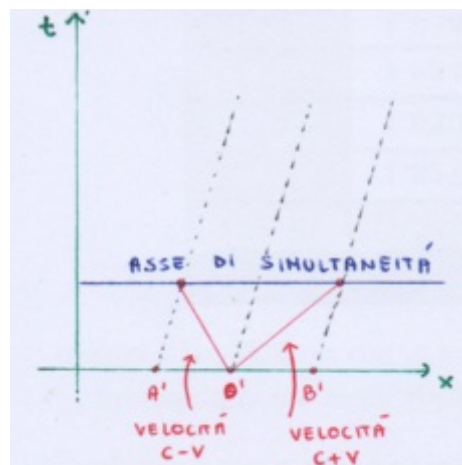


Figura 2.7: L'asse di simultaneità in fisica non relativistica

- In tutti gli SDR un raggio di luce è la bisettrice degli assi <sup>9</sup>.

Dunque se voglio rappresentare "nello stesso grafico" due SDR  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , il secondo che si muove con una certa velocità rispetto al primo, rappresento prima  $\mathcal{S}$  con gli assi  $ct$  e  $x$  ortogonali tra di loro (come è consuetudine), si disegna poi la bisettrice  $x = ct$ ; a questo punto si traccia l'asse  $x'$  inclinato<sup>10</sup> rispetto all'asse  $x$ , mentre l'asse  $ct'$  lo si posiziona in modo tale che la bisettrice di  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  coincida. Un esempio lo riporto in figura 2.8:

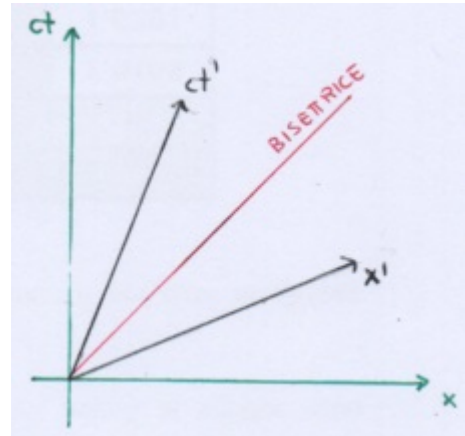


Figura 2.8:

É utile visualizzare anche quello che si sarebbe fatto in fisica non relativistica: siccome in questo caso la simultaneità è assoluta, ossia la causalità degli eventi è conservata in ogni SDR, gli assi  $x$  e  $x'$  devono necessariamente coincidere, o almeno essere paralleli. Invece gli assi  $t$  e  $t'$  possono avere angolo arbitrario tra di loro, perché non c'è velocità limite. Riporto un esempio in figura 2.9:

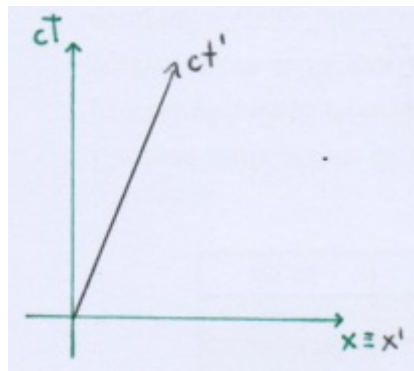


Figura 2.9:

La domanda che sorge ora è: qual è la struttura causale relativistica? In relatività gli assi che passano per un evento  $O$  sono quelli in figura 2.10.

Chiamiamo la zona superiore all'evento "zona di luce futuro" mentre la zona inferiore "zona di luce passato". Pensiamo ora di aumentare a due le dimensioni spaziali: per invarianza per rotazioni, si può intuire che dobbiamo ruotare la figura sopra riportata fino a formare due coni; definiamo il cono superiore **cono di luce futuro** e quello inferiore cono di luce passato. La restante parte del diagramma lo si chiama talvolta **zona di presente relativo**.

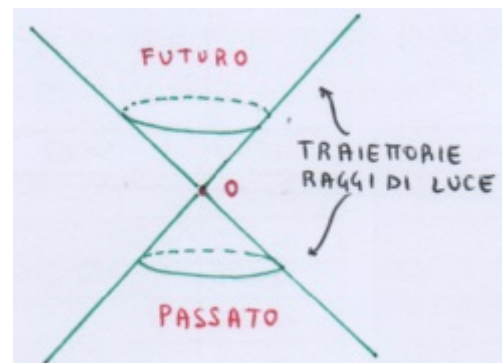


Figura 2.10:

<sup>9</sup>Da qui si capisce che gli assi possono inclinarsi al più quanto la bisettrice, dunque c'è una velocità limite

<sup>10</sup>L'inclinazione dipenderà chiaramente dalla velocità relativa tra i due sistemi

Consideriamo ora la figura 2.11 in cui sono raffigurati quattro eventi ( $O$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$ ), tre sistemi di riferimento ( $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  e  $\mathcal{S}''$ ) e immaginiamo che in ognuno di essi ci sia un osservatore solidale al proprio SDR.

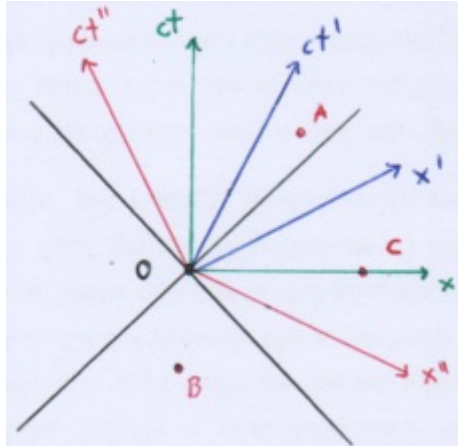


Figura 2.11:

Analizziamo la struttura causale relativistica:

- $A$  è all'interno del cono luce futuro di  $O$ , si può infatti verificare che per tutti gli osservatori è nel futuro di  $O$ .
- $B$  è all'interno del cono luce passato di  $O$ , si può infatti verificare che per tutti gli osservatori è nel passato di  $O$ .
- $C$  è nella zona di presente relativo; infatti l'osservatore in  $\mathcal{S}$  vede che  $C$  e  $O$  simultanei, invece l'osservatore in  $\mathcal{S}'$  vede  $C$  nel passato di  $O$ , e infine l'osservatore in  $\mathcal{S}''$  vede  $C$  nel futuro di  $O$ .

Possiamo analogamente vederla nel seguente modo:

1. Sia  $v$  la velocità che ha una particella che va dall'evento  $O$  all'evento  $A$ . Allora necessariamente  $v < c$ , perché la traiettoria sta sopra la bisettrice, dunque si allontana dall'origine meno rapidamente della luce. La causalità in questo caso è rispettata, come abbiamo visto precedentemente.
2. Sia ora  $v$  la velocità che ha una particella che va dall'evento  $O$  all'evento  $C$ . Allora  $v > c$ , perché per raggiungere  $C$  necessariamente deve allontanarsi dall'origine più rapidamente della luce. In questo caso la causalità è **violata**, perché il moto visto da  $\mathcal{S}'$  è assurdo. Secondo questo osservatore, siccome  $C$  è nel passato di  $O$ , la particella arriva prima di partire!

### 2.5.2 Trasformazioni di Lorentz

Abbiamo già visto quali sono le trasformazioni che sostituiscono quelle di Galileo in fisica relativistica, dando però una derivazione a posteriori. Vediamo una derivazione alternativa che discende dai postulati.

Siano allora due sistemi di riferimento  $\mathcal{S}$  di coordinate  $(x, t)$  e  $\mathcal{S}'$  di coordinate  $(x', t')$ , il secondo che si muove con velocità  $v$  rispetto al primo in direzione  $x$ .

Scriviamo la traiettoria di un punto materiale solidale a  $\mathcal{S}'$  in entrambi i SDR:

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 & \text{in } \mathcal{S}' \\ x - vt &= x_0 & \text{in } \mathcal{S} \end{aligned}$$

Formiamo il rapporto membro a membro:

$$\frac{x - vt}{x'} = \frac{x_0}{x'_0} = \alpha \text{ (costante)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha x' = x - vt & \oplus \\ \alpha x = x' + vt' & \diamond \end{cases}$$

Dove la seconda equazione nel sistema si può ricavare allo stesso modo invertendo il ruolo<sup>11</sup> dei due SDR e considerando che  $\mathcal{S}$  si muove rispetto a  $\mathcal{S}'$  con velocità  $-v$ . Dal sistema si può esplicitare  $t'$  in funzione di  $x$  e  $t$

$$t' = \frac{1}{\alpha} \left( t + \left( \frac{\alpha^2 - 1}{v} \right) x \right)$$

Si nota subito che per  $\alpha = 1$  si ritrovano le trasformazioni di Galileo. Inoltre se imponiamo l'assolutezza di  $c$ , ossia che l'equazione del raggio di luce è:

$$\begin{aligned} x' &= ct' \\ x &= ct \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha ct' = ct - vt & * \\ \alpha ct = ct' + vt' & \star \end{cases}$$

Esplicitando, per esempio,  $t'$  da  $*$  e sostituendo in  $\star$  si ottiene:

$$\alpha^2 c^2 = c^2 - v^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Siccome per  $v = 0$  i due sistemi di riferimento sono in realtà lo stesso (a meno di semplici traslazioni), ha senso considerare  $t = t'$ , dunque sappiamo che  $\alpha = 1$ . Dunque il segno corretto da prendere è quello positivo. Possiamo dunque inserire il valore di  $\alpha$ , in  $\oplus$  e  $\diamond$ :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2.15)$$

Che sono proprio le trasformazioni di Lorentz lungo  $x$  cercate. Sono decisamente più simmetriche (e gradevoli alla vista) con definendo

$$\beta = \frac{v}{c} \text{ e } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}:$$

<sup>11</sup>La situazione è totalmente simmetrica.

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.16)$$

Le trasformazioni lasciano invariati gli **intervalli spazio-temporali**  $s^2$ :

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 &= \gamma^2 (ct - \beta x)^2 - \gamma^2 (x - \beta ct)^2 \\ &= \gamma^2 (c^2 t^2 - 2ct\beta x + \beta^2 x^2 - x^2 + 2x\beta ct - \beta^2 c^2 t^2) \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (c^2 t^2 - x^2) \\ &= c^2 t^2 - x^2 \end{aligned}$$

È importante notare che l'intervallo spazio-temporale non è definito positivo. Si possono distinguere quindi i tre casi:

$$\begin{cases} s^2 = 0 & \text{intervallo di tipo luce} \\ s^2 > 0 & \text{intervallo di tipo tempo} \\ s^2 < 0 & \text{intervallo di tipo spazio} \end{cases}$$

Si può utilizzare come "unità di misura" nei grafici  $(ct, x)$ , prendendo in considerazione i tre casi:

$$\begin{cases} s^2 = 0 & \text{cono luce} \\ s^2 = 1 & \text{iperbole} \\ s^2 = -1 & \text{iperbole} \end{cases}$$

Le due iperboli vengono dette di *calibrazione*, perché consentono di determinare graficamente le unità di tempo e lunghezza dei SDR, che cambiano a seconda dell'SDR. Riporto degli esempi in figura 2.12 e 2.13:

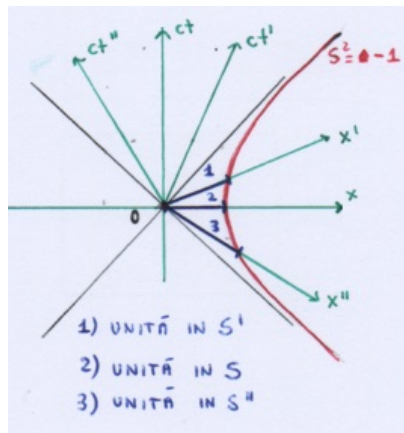


Figura 2.12: L'unità di lunghezza in diversi SDR

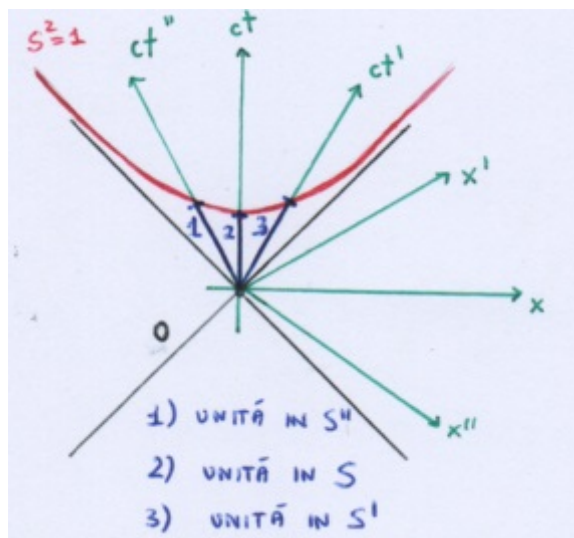


Figura 2.13: L'unità di tempo in diversi SDR

## 2.6 Relativo e assoluto

Come abbiamo già visto, in fisica relativistica gli intervalli temporali e spaziali non si conservano, mentre rimane invariato l'intervallo spazio-temporale  $\Delta s^2$ . Inoltre rimane assoluta l'**immagine spazio-temporale** di un corpo, detta anche **linea di universo**. Consideriamo sempre due SDR  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , il secondo che si muove con velocità uniforme rispetto al primo. Consideriamo anche una sbarra di lunghezza unitaria solidale a  $\mathcal{S}'$ . Riporto in figura 2.14 la linea di universo della sbarra.

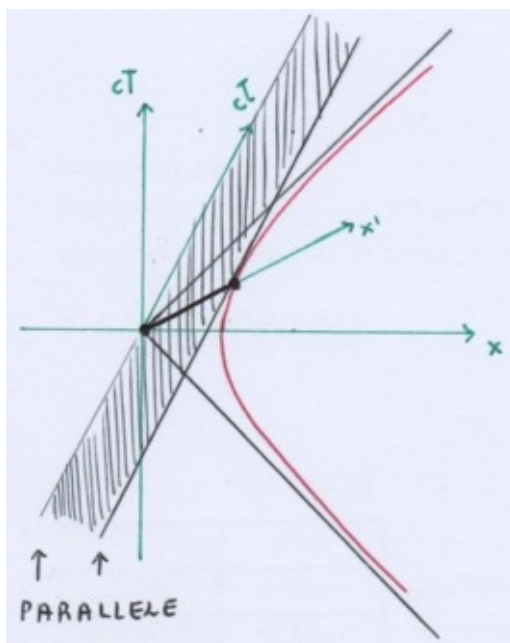


Figura 2.14: La striscia colorata rappresenta la linea di universo della sbarra (marcata)

Intuitivamente viene da dire che l'immagine spazio-temporale di una sbarra, è un seg-



mento. Come si può invece vedere, essa è una "striscia" di piano, che rappresenta tutti i punti occupati dalla sbarra per tutti i tempi. Se fosse un segmento (quello più marcato nella figura, ad esempio) sarebbe come dire che la sbarra esiste solo per un istante. Inoltre sarebbe come dire che un osservatore in  $\mathcal{S}$  vede un punto che si muove sul segmento marcato; questo perché ad ogni istante l'asse di simultaneità di  $\mathcal{S}$  interseca in un solo punto l'ipotetica immagine ST della sbarra. Inoltre vi è un altro assurdo: il punto si muoverebbe a velocità maggiore di quella della luce!

Se consideriamo invece l'intera striscia, la sbarra esiste per ogni tempo e l'intersezione tra asse di simultaneità di  $\mathcal{S}$  e striscia è proprio un segmento, la cui posizione dipende dall'istante di tempo scelto.

La linea di universo è assoluta per tutti gli osservatori, mentre è relativa il modo in cui essa viene decomposta nello spazio-tempo. Riporto un esempio in figura 2.15 e consideriamo due sbarre di lunghezza unitaria, una solidale a  $\mathcal{S}$  e una solidale a  $\mathcal{S}'$ . Per brevità mi riferirò alla prima come  $sb$  e la seconda come  $sb'$ .

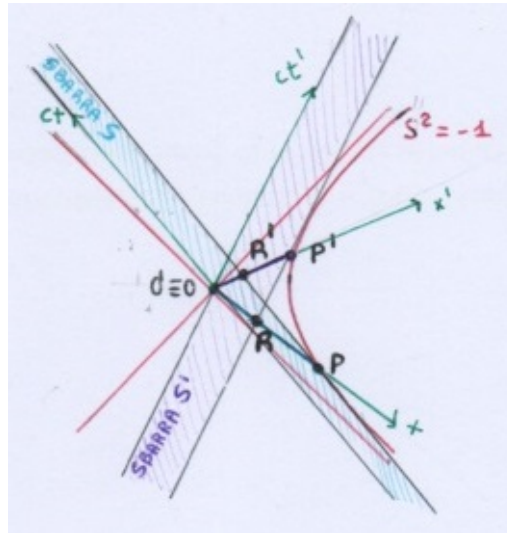


Figura 2.15:

Definisco innanzitutto il concetto di **lunghezza**: è una misura rilevata a **t costante** nel SDR che esegue la misura.

Dalla figura possiamo quindi estrarre le seguenti informazioni:

- $O'P'$  è la lunghezza di  $sb'$  misurata in  $\mathcal{S}'$ ;
- $OP$  è la lunghezza di  $sb$  misurata in  $\mathcal{S}$ ;
- $OR$  è la lunghezza di  $sb'$  misurata in  $\mathcal{S}$ ;
- $O'R'$  è la lunghezza di  $sb$  misurata in  $\mathcal{S}'$ .

Si conclude allora che

$$\begin{aligned} OR &< O'P' = 1 \Rightarrow \text{contrazione lunghezza} \\ O'R' &< OP = 1 \Rightarrow \text{contrazione lunghezza} \end{aligned}$$

Ricaviamo ora algebricamente di quanto si è contratta la  $sb'$  secondo  $\mathcal{S}$ :  
sia

$$\Delta x' = x'_{P'} - x'_{O'} \text{ lunghezza } sb' \text{ misurata in } \mathcal{S}'$$

e

$$\Delta x = x_{P'} - x_{O'} \text{ lunghezza } sb' \text{ misurata in } \mathcal{S}$$

Allora si ha, utilizzando le trasformazioni di Lorentz<sup>12</sup>

$$\Delta x' = x'_{P'} - x'_{O'} = \frac{x_{P'} - vt_{P'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_{O'} - vt_{O'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ma la misura di lunghezza, nel sistema che effettua la misura, deve essere fatta a  $t = \text{costante}$ ! Questo vuol dire che  $t_{P'} = t_{O'}$ .

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{x_{P'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_{O'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \\ \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \Delta x \quad \text{contrazione} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si potrebbero ripetere gli stessi passaggi per ricavare quanto misura  $sb$  secondo  $\mathcal{S}'$ , e si otterrebbe nuovamente che la sbarra si è contratta dello stesso fattore.

Una trattazione analoga si può fare per il fenomeno della **dilatazione dei tempi**. Consideriamo una situazione del tutto analoga a quella appena trattata. Riferiamoci quindi alla figura 2.16

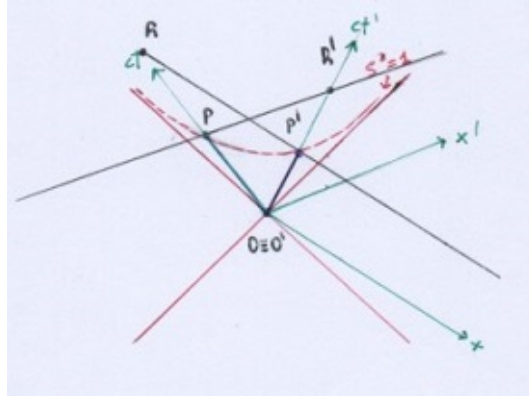


Figura 2.16: Le rette nere sono gli assi di simultaneità di  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$

Chiamo l'unità di tempo in  $\mathcal{S}$   $1s$  e l'unità di tempo in  $\mathcal{S}'$   $1s'$ . Si possono dunque fare le seguenti considerazioni:

- $O'P'$  è l'intervallo del tempo di  $\mathcal{S}'$  misurato in  $\mathcal{S}'$ ;
- $OP$  è l'intervallo del tempo di  $\mathcal{S}$  misurato in  $\mathcal{S}$ ;
- $OR$  è l'intervallo del tempo di  $\mathcal{S}'$  misurato in  $\mathcal{S}$ ;

<sup>12</sup>Ricordo che  $\mathcal{S}'$  si muove rispetto ad  $\mathcal{S}$  con velocità  $v$  in direzione  $x$ .

- $O'R'$  è l'intervallo del tempo di  $\mathcal{S}$  misurato in  $\mathcal{S}'$ .

Si nota subito che

$$\begin{aligned} OR &> O'P' = 1 \Rightarrow \text{dilatazione temporale} \\ O'R' &> OP = 1 \Rightarrow \text{dilatazione temporale} \end{aligned}$$

Algebricamente:

Definisco

$$\Delta t = \text{tempo di } \mathcal{S}' \text{ misurato in } \mathcal{S}$$

e

$$\Delta t' = \text{tempo di } \mathcal{S}' \text{ misurato in } \mathcal{S}'$$

Definisco inoltre

$$\Delta x = \text{spazio percorso dall'orologio di } \mathcal{S}' \text{ misurato da } \mathcal{S}$$

e

$$\Delta x' = \text{spazio percorso dall'orologio di } \mathcal{S}' \text{ misurato da } \mathcal{S}'$$

La prima definizione implica una considerazione fondamentale: siccome stiamo misurando un intervallo di tempo di  $\mathcal{S}'$  deve succedere che l'orologio di  $\mathcal{S}'$  è a lui solidale. Dunque  $\Delta x' = 0$ . Allora possiamo scrivere

$$\Delta x' = 0 = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \quad (2.18)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \stackrel{2.18}{=} \frac{\Delta t - \frac{v^2}{c^2}\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{dilatazione} \quad (2.19)$$

Oltre alla linea di universo, un'altra quantità assoluta è il **tempo proprio**. Il tempo proprio  $\tau$  è il tempo che misura un osservatore nel sistema di riferimento a lui solidale<sup>13</sup>. Voglio far notare che l'osservatore non deve essere necessariamente inerziale, ma basta che lo sia *istantaneamente*, ossia istante per istante.

É necessario però che gli osservatori che calcolano il tempo proprio di un osservatore istantaneamente inerziale, siano inerziali "costantemente". Infatti, l'osservatore istantaneamente inerziale non può estrarre informazioni circa il tempo proprio degli altri.

Siano allora  $\mathcal{S}'$  il sdr istantaneamente inerziale e  $\mathcal{S}$  il sdr inerziale, con il primo che si muove rispetto al secondo con una  $\vec{v}(t)$ . Sfruttiamo l'assolutezza di  $ds^2$ , l'intervallo spazio-temporale infinitesimo dell'orologio di  $\mathcal{S}'$  (che è solidale a lui). Indico con l'apice tutte le quantità dell'orologio di  $\mathcal{S}'$  misurate da  $\mathcal{S}'$ , e senz'apice le stesse quantità misurate da  $\mathcal{S}$ .

---

<sup>13</sup>In pratica il  $\Delta t'$  della formula 2.19.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \text{ (sdr inerziale)} = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = c^2 dt'^2 = c^2 d\tau^2$$

$$\Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2}$$

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad (2.20)$$

Si noti che potresti ripercorrere gli stessi passaggi anche per un altro osservatore inerziale in  $\tilde{\mathcal{S}}$  e ottenere nuovamente lo stesso risultato, perché deriva direttamente dal fatto che  $ds^2$  è assoluto.

Infine si può quindi dire che il tempo in fisica relativistica non è più assoluto, lo spazio-tempo non è più un fibrato<sup>14</sup>, ma forma un tuttuno che, matematicamente, è una varietà. Quest'ultima si denota **spazio-tempo di Minkowski**

### 2.6.1 Composizione delle velocità

Consideriamo  $\mathcal{S}'$  in moto rispetto ad  $\mathcal{S}$  (entrambi inerziali) con velocità  $v$  lungo l'asse  $x$ . Consideriamo anche un corpo che si muove con una certa velocità. Allora definisco le componenti della velocità del corpo misurate in  $\mathcal{S}$  come  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ . La stessa notazione, con l'apice, la utilizzo per indicare le stesse quantità ma misurate in  $\mathcal{S}'$ . Si può quindi scrivere

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{dx'}{dt'} \stackrel{\text{Lorentz}}{=} \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2} dt - \frac{v}{c^2} dx} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ v_x' &= \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Analogamente per le direzioni  $y$  e  $z$

$$\begin{aligned} v_y' &= \frac{dy'}{dt'} \stackrel{\text{Lorentz}}{=} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \frac{dy}{dt} - \frac{v}{c^2} dx}{dt - \frac{v}{c^2} dx} \quad \mathcal{S}' \text{ non si muove in } y \\ &= \frac{\frac{dy}{dt} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ v_y' &= \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

---

<sup>14</sup>L'idea del fibrato è che ci sia una direzione privilegiata che è assoluta per tutti, mentre le altre dipendono da "come lo si guarda". Un esempio è infatti il nastro di Moebius.

$$\begin{aligned}
v_z' &= \frac{dz'}{dt'} \stackrel{\text{Lorentz}}{=} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} \frac{dz}{1} \quad \mathcal{S}' \text{ non si muove in } z \\
&= \frac{\frac{dz}{dt} \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\
v_z' &= \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Notiamo che se stiamo nella condizione di basse velocità ( $v \ll c$ ) allora ritroviamo le consuete trasformazioni di Galileo.

Verifichiamo ora la consistenza della relatività speciale, dimostrando che la velocità della luce è assoluta, considerando due casi particolari. Vogliamo quindi dimostrare che se  $|\vec{v}| = c$  allora  $|\vec{v}'| = c$ .

i)  $v_x = c \quad v_y = v_z = 0$

Allora possiamo scrivere

$$v_x' \stackrel{2.21}{=} \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = c$$

ii)  $v_y = c \quad v_x = v_z = 0$

$$v_x' \stackrel{2.21}{=} -v \quad v_y' \stackrel{2.22}{=} c\sqrt{1-\beta^2}$$

$$v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = v^2 + c^2(1-\beta^2) = c^2$$

Una domanda che sorge naturale è: l'aberrazione in fisica non relativistica funzionava, e ora? Nella notazione utilizzata prima, consideriamo  $\mathcal{S}$  il SDR della stella,  $\mathcal{S}'$  il SDR della Terra. Richiamando la figura 1.1 consideriamo che entrambi i SDR abbiano l'asse  $x$  orientato come la velocità  $v$  della Terra e l'asse  $y$  a lui ortogonale che punta verso la stella. L'unica differenza sta nel fatto che  $\mathcal{S}$  è fermo, l'altro è in movimento. Allora la luce che parte dalla stella ha velocità  $\vec{v} = (0, -c)$ , misurata in  $\mathcal{S}$ . Calcoliamo la velocità della luce secondo la Terra, utilizzando le formule 2.21 e 2.22. Voglio precisare che, essendo la sottointesa trasformazione di Lorentz lungo  $x$  e la luce si muove in sola direzione  $y$ ,  $v_x = 0$ .

$$\vec{v}' = (-v, -c\sqrt{1-\beta^2})$$

Si noti che il modulo di  $\vec{v}'$  è sempre  $c$ .

$$\tan \theta = \frac{v_x'}{v_y'} = \frac{-v}{-c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{1-\beta^2} \sim \beta \text{ per } \beta \text{ piccoli}$$

Quindi ancora una volta, la fisica non relativistica viene inclusa come limite per basse velocità (rispetto a quella della luce nel vuoto).

# Capitolo 3

## Formulazione covariante

### 3.1 Invarianza di $ds^2$

Ci poniamo ora il problema di descrivere la fisica relativistica nel suo formalismo naturale, chiamato anche covariante. Il modo meno traumatico per approcciarsi a questa problematica è vedere il riscontro con ciò che si è fatto nella fisica classica.

In questo caso il nostro invariante è l'intervallo di spazio <sup>1</sup>; quali sono le trasformazioni geometriche che lasciano invariata questa quantità fisica?

La risposta conduce naturalmente alle traslazioni e rotazioni<sup>2</sup>. Dunque il formalismo naturale con il quale descrivere la fisica classica è fatto da quegli enti che trasformano "naturalmente" per queste trasformazioni, ossia quegli operatori che descrivono in modo semplice la struttura matematica. Questi enti sono gli **scalari**, i **vettori** e i **tensori**<sup>3</sup>.

Dimostriamo innanzitutto che l'invarianza di  $ds^2$  discende direttamente dai postulati della relatività speciale. Definiamo le coordinate cartesiane del SDR  $\mathcal{S}$  come

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \quad \text{quindi } \mu = 0, 1, 2, 3$$

Voglio precisare che  $x^\mu$  si riferisce a una singola coordinata, quindi è un numero! È un modo compatto per scrivere il vettore. Siano allora le coordinate cartesiane di  $\mathcal{S}'$

$$x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct, \vec{x}')$$

Si può anche supporre, senza perdere di generalità, che al tempo 0 gli origini dei due sdr coincidano.

**Notazione.** Per convenzione utilizzerò gli indici con lettera **greca** che vanno da 0 a 3, mentre gli indici con lettera **latina** che vanno da 1 a 3.

**Teorema 3.1** (di Poincaré). *Se valgono i postulati della relatività speciale allora l'intervallo spazio-temporale*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

*è invariante per ogni sistema di riferimento inerziale.*

---

<sup>1</sup>E anche i tempi chiaramente, ma questi sono assoluti, dunque non servono delle trasformazioni.

<sup>2</sup>Anche riflessioni, ma sono poco rilevanti.

<sup>3</sup>Fondamentalmente sono matrici, che in fisica classica hanno due dimensioni, ossia righe e colonne.

**Dimostrazione.** Consideriamo le coordinate cartesiane  $x^\mu$  e  $x'^\mu$ , definite come in precedenza. Allora saranno legate dalla seguente trasformazione:

$$x'^\mu = f^\mu(x^\nu) \quad \text{con } \nu = 0, 1, 2, 3$$

Differenziando

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Se  $\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}$  dipendesse dal punto dello spazio-tempo, quest'ultimo non sarebbe omogeneo, come afferma il primo postulato. Vorrebbe infatti dire che punti diversi dello ST trasformano diversamente. Allora

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \quad \text{costante}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$  rappresenta le entrate di una matrice, e siccome entrambi gli indici variano tra 0 e 4, è una matrice  $4 \times 4$ . Vista la sua definizione, è proprio la matrice jacobiana della  $f$ , che, essendo fatta di costanti, ci dice che  $f$  è una trasformazione lineare in  $x^\nu$ . Allora possiamo scrivere

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad \text{con } a^\mu \in \mathbb{R}^4$$

Scriviamo ora l'intervallo  $ds^2$

$$ds'^2 = (dx'^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (dx'^i)^2$$

Sviluppiamo il primo termine, per cercare di capire come sono fatti i quadrati sviluppati (poi tanto sono tutti uguali).

$$\begin{aligned} (dx'^0)^2 &= \left( \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^0{}_\nu dx^\nu \right)^2 = (\Lambda^0{}_0 dx^0 + \Lambda^0{}_1 dx^1 + \Lambda^0{}_2 dx^2 + \Lambda^0{}_3 dx^3)^2 \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 dx^0 dx^0 + \Lambda^0{}_1 \Lambda^0{}_1 dx^1 dx^1 + \Lambda^0{}_2 \Lambda^0{}_2 dx^2 dx^2 + \Lambda^0{}_3 \Lambda^0{}_3 dx^3 dx^3 + \\ &+ 2\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 dx^0 dx^1 + 2\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_2 dx^0 dx^2 + 2\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_3 dx^0 dx^3 + 2\Lambda^0{}_1 \Lambda^0{}_2 dx^1 dx^2 + \\ &+ 2\Lambda^0{}_1 \Lambda^0{}_3 dx^1 dx^3 + 2\Lambda^0{}_2 \Lambda^0{}_3 dx^2 dx^3 \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Lambda^0{}_\nu \Lambda^0{}_\mu dx^\nu dx^\mu \end{aligned}$$

Allora si può scrivere:

$$ds'^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \left[ \Lambda^0{}_\nu \Lambda^0{}_\mu - \sum_{i=1}^3 \Lambda^i{}_\nu \Lambda^i{}_\mu \right] dx^\nu dx^\mu$$

Definiamo allora  $\Lambda^0{}_\nu \Lambda^0{}_\mu - \sum_{i=1}^3 \Lambda^i{}_\nu \Lambda^i{}_\mu = g_{\mu\nu}$ , e si vede che è simmetrico.

$$ds'^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu \quad *$$

A questo punto scriviamo  $g_{\mu\nu}$  in forma di matrice, giusto per chiarire le idee:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora l'espressione di un raggio di luce che si propaga in  $\mathcal{S}$ , ossia  $c^2 dt^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}$ , e dunque  $ds^2 = 0$ . Siccome la luce ha velocità assoluta, in un altro sdr  $\mathcal{S}'$  sarà  $c^2 dt'^2 = dx'^{1^2} + dx'^{2^2} + dx'^{3^2}$ , e quindi ancora  $ds'^2 = 0$ . Questo argomento basta a dire che se in un SDR l'intervallo spazio temporale è nullo, tale sarà in ogni altro SDR inerziale, e ciò deriva direttamente dal fatto che la velocità della luce è assoluta.

Preciso anche che, essendo la matrice  $\Lambda$  costante e dipendente solo dai due sistemi di riferimento, una volta fissati questi essa è data. Dunque sono costanti anche gli elementi della matrice  $\mathcal{G}$ . Questo ci dice che possiamo considerare qualsiasi processo che avviene in questi due sdr per trovare gli elementi della matrice.

Consideriamo ora un raggio di luce che si propaga in  $\mathcal{S}$  lungo  $x^1$ . Allora dovrà essere  $dx^1 = \pm dx^0$  (considerando entrambi i casi di propagazione in verso positivo e negativo), poiché  $dx^2 = dx^3 = 0$ .

Per quello che si propaga nel verso positivo

$$\begin{aligned} 0 = ds'^2 &\stackrel{*}{=} g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \\ &= (g_{00} + 2g_{01} + g_{11})(dx^0)^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Considerando invece quello che si propaga in verso negativo

$$\begin{aligned} 0 = ds'^2 &\stackrel{*}{=} g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \\ &= (g_{00} - 2g_{01} + g_{11})(dx^0)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Sommando (1) e (2) troviamo

$$g_{00} + g_{11} = 0$$

Invece sottraendo (1) e (2) troviamo

$$g_{01} = 0$$

Se ora invio un raggio di luce in direzione  $x^2$  posso rifare i calcoli, che sono gli stessi, e si trova

$$g_{00} + g_{22} = 0 \qquad g_{02} = 0$$

Infine posso considerare un raggio in direzione  $x^3$

$$g_{00} + g_{33} = 0 \qquad g_{03} = 0$$



A questo punto siamo riusciti a mostrare che la matrice  $\mathcal{G}$  è fatta nel modo seguente

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{00} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{12} & -g_{00} & g_{23} \\ 0 & g_{13} & g_{23} & -g_{00} \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora un raggio di luce che si propaga in una direzione generica. Utilizzando la espressione \* possiamo scrivere il  $ds'^2$ .

$$\begin{aligned} 0 = ds'^2 &= g_{00} \left[ (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 g_{ij} dx^i dx^j \\ &= g_{00} ds^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 g_{ij} dx^i dx^j \Rightarrow g_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

Dove l'implicazione è giustificata dal fatto che, trattando un raggio di luce, anche  $ds^2 = 0$ , dunque l'unico modo per cui la sommatoria è nulla è che siano nulli i coefficienti.

Possiamo quindi dire che la matrice  $\mathcal{G}$  è diagonale. Precisamente si ha

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{00} \end{pmatrix}$$

Dunque abbiamo detto che i coefficienti della matrice  $\Lambda$  non possono essere funzione della posizione nello spazio-tempo, quindi in generale verrebbe da pensare che, se  $\mathcal{S}'$  si muove con velocità  $\vec{v}$  rispetto a  $\mathcal{S}$ , allora  $g_{00}(\vec{v})$ . Se ci pensiamo bene però, non può dipendere dalla direzione della velocità: se così fosse, avremmo una direzione privilegiata rispetto alla quale far muovere i due sistemi di riferimento, ma per isotropia non può essere. È lecito aspettarsi che il coefficiente  $g_{00}$  dipenda solo dal modulo.

Notiamo allora che  $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$ . Ora se è vero che  $ds'^2 = g_{00}(|\vec{v}|)ds^2$ , allora deve valere anche  $ds^2 = g_{00}(|-\vec{v}|)ds'^2 = g_{00}(|\vec{v}|)ds'^2$ , perché le leggi della fisica sono invarianti in ogni sistema di riferimento inerziale; è come dire che potrei ripercorrere gli stessi passaggi e pensare che sia  $\mathcal{S}$  a muoversi rispetto a  $\mathcal{S}'$  con velocità  $-\vec{v}$ .

Allora possiamo scrivere

$$ds'^2 = g_{00}(|\vec{v}|)ds^2 = g_{00}(|\vec{v}|)g_{00}(|\vec{v}|)ds'^2 \Rightarrow g_{00}^2(|\vec{v}|) = 1$$

Consideriamo infine che se  $|\vec{v}| = 0$ , allora non c'è spostamento relativo tra i due sdr, dunque i due sdr devono coincidere. Necessariamente deve essere  $g_{00} = 1$ . Allora si capisce che estraendo la radice il segno giusto è quello positivo. Possiamo concludere che la matrice  $\mathcal{G}$  è fatta nel seguente modo

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora per l'equazione \* si può facilmente verificare che  $ds'^2 = ds^2$

□

### 3.2 Gruppo di invarianza di $ds^2$

Nella dimostrazione del teorema 3.1 abbiamo visto che esistono due tipi di notazioni: quella matriciale, che pone l'attenzione sull'effettiva relazione tra gli enti in gioco, e quella con gli indici che si focalizza di più sugli elementi della matrici. Tanto per riassumere

indici	matriciale
$x^\mu$	$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$
$\Lambda^\mu{}_\nu$	$\Lambda$
$g_{\mu\nu}$	$\mathcal{G}$

**Osservazione.** Nella notazione di  $\Lambda$  si prendono le seguenti notazioni:

$$\Lambda^\mu{}_\nu$$

indica l'elemento nella riga  $\mu$  colonna  $\nu$ . La **trasposta** si denota invece

$$\Lambda_\nu{}^\mu$$

Invertendo la posizione dei due indici si trova effettivamente l'**inversa**, quindi

$$\Lambda^\nu{}_\mu$$

dunque l'**inversa trasposta** si denota

$$\Lambda_\mu{}^\nu$$

**Notazione.** (Convenzione di Einstein sugli indici). Se in una funzione o nel membro di una equazione vi sono due indici uguali, uno alto e uno basso, si intendono sommati (si dice anche **contratti**).

Per esempio possiamo scrivere

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

alleggerendo dunque notevolmente la scrittura.

Inoltre per gli indici contratti il nome può essere scelto arbitrariamente e cambiato, purché non sia uguale ad altri indici. Per esempio nella trasformazione del  $ds^2$

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho dx^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma = dx^\rho \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma \quad *$$

Ora con gli indici possiamo lasciare la scrittura così com'è. Se vogliamo avere un riscontro in forma matriciale, bisogna stare però attenti che gli indici contratti siano **primi vicini**.

Ad esempio in \* gli indici  $\sigma$  sono primi vicini, mentre non possiamo dire lo stesso degli indici  $\rho$  e  $\mu$ . Allora capiamo che, per rispettare la notazione di Einstein per la contrazione, dobbiamo considerare la trasposta di  $\Lambda^\mu_\rho$  e l'indice di  $dx^\rho$  deve essere basso<sup>4</sup>. Allora in termini matriciali

$$ds'^2 = d\tilde{x}\tilde{\Lambda}\mathcal{G}\Lambda dx$$

Riprendiamo la \*. Sappiamo che  $ds'^2 = ds^2 = g_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma$ , quindi

$$dx^\rho \Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma dx^\sigma = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \Rightarrow \Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

che in termini matriciali si traduce in

$$\tilde{\Lambda}\mathcal{G}\Lambda = \mathcal{G} \quad (3.1)$$

Un ulteriore aspetto della notazione di Einstein è il seguente: in ogni formula tutti gli indici non contratti nel membro di destra devono avere i corrispettivi uguali nel membro di sinistra e **nella stessa posizione**, alto o basso.

Chiamiamo gli indici alti **controvarianti**, quelli bassi **covarianti**.

La notazione che risulta più comoda da usare è quella con gli indici, ma nel seguito mi riferirò talvolta anche a quella matriciale per avere un approccio più familiare. Adesso ci occupiamo di capire quali siano le trasformazioni che lasciano il  $ds^2$  invariato: queste si possono scrivere in forma matriciale

$$x' = \Lambda x + a$$

con  $\Lambda \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  che soddisfa la relazione 3.1 e  $a \in \mathbb{R}^4$ . Denotiamo tale trasformazione come  $\{\Lambda, a\}$ ; l'insieme di queste trasformazioni costituisce un **gruppo**.

**Definizione.** Un insieme  $G$  si dice **gruppo** se su di esso è definita una legge di composizione  $\cdot$  tale che

1.  $\forall g_1, g_2 \in G \exists g = g_1 \cdot g_2 \in G$
2. la legge di composizione è associativa, ossia  $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \forall g_1, g_2, g_3 \in G$
3.  $\exists e \in G$  detto elemento neutro tale che  $e \cdot g = g \cdot e = g \forall g \in G$
4.  $\exists ! g^{-1} \in G$  detto elemento inverso di  $g$  tale che  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e \forall g \in G$

**Teorema 3.2.** *L'insieme costituito da  $\{\Lambda, a\}$  è un gruppo, con  $\Lambda \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  che soddisfa la relazione 3.1 e  $a \in \mathbb{R}^4$ , detto di **Poincaré**, denotato con  $\mathcal{P}$  e con la legge di composizione*

$$\{\Lambda_2, a_2\} \cdot \{\Lambda_1, a_1\} = \{\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2\} \quad (3.2)$$

**Dimostrazione.** (Accenni). Verifichiamo la legge di composizione. Pensiamo di fare due trasformazioni

$$\begin{array}{lll} \text{prima} & x \rightarrow x' & \text{con } x' = \Lambda_1 x + a_1 \\ \text{poi} & x' \rightarrow x'' & \text{con } x'' = \Lambda_2 x' + a_2 \end{array}$$

---

<sup>4</sup>La differenza tra i vettori con indice basso o alto la vedremo in seguito.

Sostituendo a  $x'$  la sua espressione ricaviamo

$$x'' = \Lambda_2 \Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2$$

Ma la matrice  $\Lambda_2 \Lambda_1$  soddisfa la proprietà 3.1?

$$\widetilde{\Lambda_2 \Lambda_1} \mathcal{G} \Lambda_2 \Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2 \mathcal{G} \Lambda_2 \Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1 \mathcal{G} \Lambda_1 = \mathcal{G}$$

L'elemento neutro è  $\{1, 0\}$  mentre l'elemento inverso di  $\Lambda$  è  $\{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a\}$ . Questo si verifica subito sostituendo al posto di  $\{\Lambda_1, a_1\}$  o  $\{\Lambda_2, a_2\}$  nella 3.2.  $\square$

**Definizione.** Un sottoinsieme  $H \subset G$  è detto **sottogruppo** se  $H$  è un gruppo con la legge di composizione di  $G$ .

**Esempio.** L'insieme formato da  $\{\mathbb{I}, a\}$  con  $a \in \mathbb{R}^4$  è un sottogruppo del gruppo di Poincaré e descrive le traslazioni spazio-temporali  $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ .

**Esempio.** L'insieme formato da  $\{\Lambda, 0\}$  con  $a \in \mathbb{R}^4$  è un sottogruppo del gruppo di Poincaré chiamato **gruppo di Lorentz** e indicato con  $\mathcal{L}$ . Si verifica che ha 4 componenti connesse<sup>5</sup>. Consideriamo  $\mathcal{G} = \tilde{\Lambda} \mathcal{G} \Lambda$ . Per il teorema di Binet, il determinante di un prodotto di matrici è il prodotto dei determinanti, dunque

$$\det \mathcal{G} = \det \tilde{\Lambda} \det \mathcal{G} \det \Lambda = \det \Lambda^2 \det \mathcal{G} \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

È chiaro che non si può passare con continuità dalle trasformazioni con determinante +1 a quelle con -1, dunque abbiamo individuato due delle componenti connesse. La componente di  $\mathcal{L}$  con determinante +1 si chiama **gruppo di Lorentz speciale**  $\mathcal{L}_+$ , la componente con determinante -1 si denota invece **insieme delle trasformazioni improprie**  $\mathcal{L}_-$ .

Analizziamo ora la prima componente della matrice  $\Lambda$ , ossia  $\Lambda^0_0$ .

$$1 = g_{00} = \Lambda^\mu_0 g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_0$$

Ora sappiamo che la matrice  $\mathcal{G}$  è diagonale, dunque può essere solo  $\mu = \nu$

$$1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow |\Lambda^0_0| \geq 1$$

perché la sommatoria è sicuramente una quantità positiva. Allora troviamo altre due condizioni per distinguere le componenti: se  $\Lambda^0_0 \geq 1$  si chiama **gruppo di Lorentz ortocrono**  $\mathcal{L}^\uparrow$ , se  $\Lambda^0_0 \leq -1$  si chiama **insieme delle trasformazioni Lorentz anti-ortocrone**  $\mathcal{L}^\downarrow$ . Le condizioni di  $\det \Lambda = \pm 1$  e  $|\Lambda^0_0| \geq 1$  si possono chiaramente verificare simultaneamente, e sfruttando il fatto che non si può passare con continuità da determinante +1 a -1 le combinazioni che ci danno le componenti connesse sono quattro

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\uparrow_+ \cup \mathcal{L}^\downarrow_+ \cup \mathcal{L}^\uparrow_- \cup \mathcal{L}^\downarrow_-$$

Si può mostrare che solo  $\mathcal{L}^\uparrow_+$  è un gruppo, e viene chiamato **gruppo di Lorentz ristretto**. Si può inoltre mostrare che anche il gruppo di Poincaré si divide nello stesso modo

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^\uparrow_+ \cup \mathcal{P}^\downarrow_+ \cup \mathcal{P}^\uparrow_- \cup \mathcal{P}^\downarrow_-$$

<sup>5</sup>Non tra di loro; significa che sono i sottoinsiemi connessi "più grandi" del gruppo di Lorentz.

Siamo ora interessati a capire quanti parametri indipendenti ha una trasformazione  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ . Sappiamo che  $\Lambda \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ , dunque ha sicuramente 16 parametri, che sarebbero tutti indipendenti se non ci fossero restrizioni. Ma sappiamo che la trasformazione deve soddisfare

$$\mathcal{G} = \tilde{\Lambda} \mathcal{G} \Lambda$$

Si tratta dunque dell'uguaglianza tra due matrici, dunque ci sarebbero 16 equazioni, una per componente. Però le equazioni indipendenti sono 10, perché la  $\mathcal{G}$  è diagonale, quindi contare sia gli elementi sotto che sopra la diagonale sarebbe come contarli due volte. Dunque abbiamo  $16 - 10 = 6$  parametri ancora da determinare. Tre di questi determinano le rotazioni intorno agli assi, mentre i restanti tre determinano le 3 trasformazioni di Lorentz lungo gli assi.

Per fare un esempio, prendiamo la  $\Lambda$  associata alla trasformazione di Lorentz lungo l'asse  $x$  con velocità  $\beta$ . Siccome deve essere  $x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ , ricordando la trasformazione 2.16, troviamo che

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

si vede dunque che appartiene a  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Un elemento di  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  è invece la trasformazione di parità, ossia l'inversione di segno delle coordinate spaziali che chiaramente ha matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un elemento di  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  è invece l'inversione temporale

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E infine un elemento di  $\mathcal{L}_+^\downarrow$  è la composizione  $PT$

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si dimostra il seguente fatto

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = P \mathcal{L}_+^\uparrow \quad \mathcal{L}_-^\downarrow = T \mathcal{L}_+^\uparrow \quad \mathcal{L}_+^\downarrow = PT \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Ossia che la composizione di una trasformazione nel gruppo di Lorentz ristretto con una delle precedenti tre matrici, dà un elemento della componente di appartenenza di  $P, T$  o  $PT$ .

Allo stesso modo le cose valgono anche per il gruppo di Poincaré, dunque nelle sue componenti solo  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  è anch'esso un gruppo. Ci si può chiedere allora per quale di questi due gruppi sono invarianti le leggi fisiche. Fino al 1957 si pensava che le leggi fisiche fossero invarianti per parità e per inversione temporale, dunque si pensava che  $\mathcal{P}$  fosse il gruppo di invarianza di corretto. In quell'anno però l'**esperimento di Wu** mostrò che la parità veniva violata da alcuni fenomeni, dunque non è una simmetria.

L'esperimento consisteva nello studio di nuclei di  $^{60}\text{Co}$ , che decadono emettendo elettroni principalmente lungo la direzione del momento angolare atomico. I momenti angolari degli atomi vengono tutti allineati utilizzando un campo magnetico. Applicare una trasformazione di parità in questo caso, ossia invertire le coordinate, è equivalente a invertire il momento angolare atomico, ossia il verso del campo magnetico. Se la parità fosse una simmetria, ossia lasciasse invariate le leggi fisiche, non dovrebbe succedere nulla alla direzione principale di emissione degli elettroni perché non ci dovrebbe essere correlazione con la direzione del momento. Sperimentalmente invece si è visto che gli elettroni seguivano ancora la direzione del momento angolare. Altri esperimenti misero in luce il fatto che anche l'inversione temporale non è una simmetria, allora l'invarianza si ha solo per  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ .

### 3.2.1 Ulteriore derivazione delle trasformazioni di Lorentz

Ricordiamo l'espressione del  $ds^2$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2$$

Se non fosse per il segno meno, sarebbe come una metrica euclidea, dunque si avrebbe invarianza per rotazioni in 4 dimensioni. Possiamo però ridurci a questo caso, utilizzando un trucco: definiamo la coordinata  $x^4 = ix^0 = ict$ , allora sostituendo nell'espressione dell'intervallo spazio temporale

$$ds^2 = - \sum_{\mu=1}^4 (dx^\mu)^2$$

Ci siamo ridotti allora a una metrica analoga a quella euclidea, dunque si ha invarianza per rotazioni di  $x^1, x^2, x^3, x^4$ . Per semplicità consideriamo solo le "rotazioni" di  $x^1, x^4$ . Allora

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 \cos \xi - x^4 \sin \xi \\ x'^4 = x^1 \sin \xi + x^4 \cos \xi \end{cases}$$

Ora sappiamo che  $x'^1$  e  $x^1$  devono essere reali, mentre  $x'^4$  e  $x^4$  devono essere immaginari puri. È sufficiente porre la condizione che  $\xi = i\varphi$ , poiché

$$\begin{cases} \cos \xi = \cosh \varphi \\ \sin \xi = i \sinh \varphi \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 \cosh \varphi - ix^0 i \sinh \varphi \\ ix'^0 = ix^1 \sinh \varphi + ix^0 \cosh \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'^1 = x^1 \cosh \varphi + x^0 \sinh \varphi \\ x'^0 = x^1 \sinh \varphi + x^0 \cosh \varphi \end{cases}$$

Ora supponiamo che un sdr  $\mathcal{S}'$  si muova con velocità  $v$  in direzione  $x^1$  rispetto a  $\mathcal{S}$ . Allora un oggetto solidale all'origine spaziale di  $\mathcal{S}$  sarà visto da  $\mathcal{S}$  in  $x^1 = 0$ , mentre da  $\mathcal{S}'$  sarà visto muoversi con equazione  $x'^1 = -vt'$ . Allora il sistema diventa

$$\begin{cases} x'^1 = x^0 \sinh \varphi \\ x'^0 = x^0 \cosh \varphi \end{cases}$$

Inoltre possiamo trovare l'espressione di  $\beta$

$$-\beta = -\frac{v}{c} = -\frac{vt'}{ct'} = \frac{x'^1}{x'^0} = \tanh \varphi$$

Ora in generale sappiamo che

$$\sinh \varphi = \frac{\tanh \varphi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi}} \quad \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi}}$$

Sostituendo  $\tanh \varphi = -\beta$ , e nel sistema

$$\begin{cases} x'^1 = -\beta \gamma x^0 \\ x'^0 = \gamma x^0 \end{cases}$$

Che sono le equazioni di Lorentz con  $x^1 = 0$ .

### 3.3 Formalismo naturale della relatività speciale

In fisica non relativistica, l'invarianza dell'intervallo spaziale  $|d\vec{x}|^2$  porta all'invarianza delle leggi fisiche per roto-traslazioni. Per descrivere queste trasformazioni gli enti naturali da utilizzare sono scalari e vettori.

Le roto-traslazioni cartesiane sono trasformazioni del tipo

$$x'^i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j + a_j \quad (3.4)$$

con  $a_j \in \mathbb{R}^3$  e la matrice  $R$  tale che  $\tilde{R}R = \mathbb{I}$ .

In fisica newtoniana diciamo che un ente matematico  $A$  che descrive una grandezza fisica è uno **scalare** se per 3.4 si ha che  $A = A'$ , ossia è invariante per trasformazioni. Un esempio è indubbiamente la massa.

Diciamo invece che un ente  $V_i$  a tre componenti è un **vettore** se per 3.4 trasforma come

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} V_j$$

Ad esempio, la velocità  $v_i$  è un vettore, ma non  $x_i$ , poiché trasforma con la non omogenea. Ci sono anche enti a due indici  $T_{ij}$ , per esempio il tensore di inerzia, che trasformano come il prodotto tensore tra vettori. Definiamo il prodotto tensore come segue

$$T_{ij} = v_i w_j = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix}$$

Siccome  $v_i$  e  $w_j$  trasformano singolarmente come presentato di sopra, allora  $T_{ij}$  trasformerà come

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^3 R_{ik} v_k \sum_{l=1}^3 R_{jl} w_l = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} v_k w_l = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} T_{kl}$$

Si possono definire anche enti a tre indici  $\mathbf{T}_{ijk}$ , che trasformano come il prodotto tensore di tre vettori, facendo dunque gli stessi passaggi del caso a due indici

$$T'_{ij} = \sum_{r,l,p=1}^3 R_{ir} R_{jl} R_{kp} v_r w_l t_p = \sum_{r,l,p=1}^3 R_{ir} R_{jl} R_{kp} T_{rlp}$$

Chiaramente si può iterare il procedimento fino ad avere dei tensori di ordine  $n$ , e definire come trasformano allo stesso modo di quanto fatto per tensori di due e tre indici. Lo spazio in cui vivono i tensori di un dato ordine (numero di indici), è uno spazio vettoriale, perché è evidente che la combinazione lineare di due tensori dello stesso ordine è ancora un tensore del medesimo ordine. Si possono anche moltiplicare per uno scalare, dunque lo spazio è uno spazio vettoriale.

Ricapitolando, possiamo riassumere nel seguente modo gli enti visti in meccanica newtoniana

- scalari  $\leftrightarrow$  tensori di ordine 0 (nessun indice)
- vettori  $\leftrightarrow$  tensori di ordine 1 (1 indice)
- matrici  $\leftrightarrow$  tensori di ordine 2 (2 indici)

In fisica newtoniana si utilizza il calcolo tensoriale poiché le leggi della fisica in un sistema isolato con questo tipo di calcolo sono invarianti in forma (o covarianti), per trasformazioni tra sistemi roto-traslati. Facciamo un esempio per capire cosa significa "invarianti in forma". Consideriamo l'equazione di Newton  $F_i = ma_i$  in un sistema  $\mathcal{S}$ . Consideriamo un sistema  $\mathcal{S}'$  roto-traslato rispetto a  $\mathcal{S}$ . Allora

$$F'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} F_j = m \sum_{j=1}^3 R_{ij} a_j = ma'_i$$

La forma dell'equazione è rimasta la stessa anche dopo la trasformazione.

Cominciamo ora ad analizzare le differenze con la fisica relativistica. In fisica newtoniana lo spazio studiato ha chiaramente 3 dimensioni, mentre in relatività abbiamo visto che si aggiunge una **quarta dimensione**. La metrica utilizzata in MN è quella euclidea, mentre in RS è quella di Minkowski, del  $ds^2$ . La corrispondente matrice della metrica in MN è chiaramente l'unità 3-dimensionale, mentre in relatività abbiamo visto che corrisponde alla matrice  $g_{\mu\nu}$ .

Definiamo allora

- gli indici **controvarianti** sono quelli alti, ad esempio  $A^\mu$ ;
- gli indici **covarianti** sono quelli bassi, ad esempio  $A_\mu$



La relazione tra i due è la seguente

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Allora deduciamo<sup>6</sup> che

$$A_0 = A^0 \quad A_i = -A^i \quad i = 1, 2, 3$$

In fisica newtoniana invece, siccome la metrica è data dalla matrice unità, non si avevano cambi di segno tra indici controvarianti e covarianti, dunque non c'era alcuna differenza nel porre gli indici in alto o in basso, e infatti non se ne è mai tenuto conto.

Ricordiamo che le leggi della fisica relativistica sono invarianti per trasformazioni del tipo, e ripercorriamo gli enti precedentemente presentati

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (3.5)$$

$A$  è uno **scalare** se per 3.5 si ha che

$$\boxed{A' = A} \quad (3.6)$$

$A$  è un **quadrivettore controvariante** se per 3.5 si ha che

$$\boxed{A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu} \quad (3.7)$$

$A$  è un **quadrivettore covariante** se per 3.5 si ha che

$$A'_\mu = g_{\mu\nu} A'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma A^\sigma$$

In questo caso possiamo andare avanti con i calcoli per capire meglio che forma ha la matrice  $g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma$ . Definiamo la matrice inversa di  $g_{\mu\nu}$  con  $g^{\mu\nu}$ . Allora è chiaro che

$$A^\sigma = g^{\rho\sigma} A_\rho$$

Sostituiamo quest'ultima relazione nell'equazione precedente

$$A'_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma g^{\rho\sigma} A_\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{A'_\mu = \Lambda_\mu^\rho A_\rho} \quad (3.8)$$

Abbiamo trovato la legge di trasformazione per i quadrivettori controvarianti. Cerchiamo però di capire che matrice è  $\hat{\Lambda}$  di coefficienti  $\Lambda_\mu^{\rho 7}$ . Sappiamo che

$$\hat{\Lambda} = \mathcal{G} \Lambda \mathcal{G}^{-1} \quad \text{ma anche che} \quad \mathcal{G} = \tilde{\Lambda} \mathcal{G} \Lambda$$

Dalla relazione sulla destra ricaviamo subito che

$$\tilde{\Lambda} = \mathcal{G} \Lambda^{-1} \mathcal{G}^{-1} = (\mathcal{G}^{-1} \Lambda \mathcal{G})^{-1} = (\mathcal{G} \Lambda \mathcal{G}^{-1})^{-1}$$

---

<sup>6</sup>Ricordo sempre che le componenti non nulle di  $g_{\mu\nu}$  sono quelle con  $\mu = \nu$ . Fissare uno dei due corrisponde a fissare anche l'altro.

<sup>7</sup>In realtà sappiamo già che è l'inversa trasposta, ma dimostriamolo

Quindi

$$\tilde{\Lambda} = (\hat{\Lambda})^{-1} \Rightarrow \hat{\Lambda} = (\tilde{\Lambda})^{-1}$$

In definitiva possiamo dire che i quadrivettori covarianti trasformano con la matrice trasposta e inversa. Verifichiamo con gli indici che effettivamente  $\tilde{\Lambda}\hat{\Lambda} = \mathbb{I}$

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = \Lambda_{\nu}^{\mu} g_{\mu\alpha} \Lambda_{\sigma}^{\alpha} g^{\sigma\rho}$$

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} g_{\mu\alpha} \Lambda_{\sigma}^{\alpha} = (\tilde{\Lambda} \mathcal{G} \Lambda)_{\nu\sigma} = g_{\nu\sigma}$$

Infine

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = g_{\nu\sigma} g^{\sigma\rho} = g_{\nu\sigma} g_{\sigma\rho} = (\mathcal{G}^2)_{\nu\rho} = \mathbb{I}_{\nu\rho}$$

**Osservazione.** Per prendere maggiore confidenza con il calcolo utilizzando la notazione con gli indici dimostriamo che effettivamente  $\Lambda_{\mu}^{\nu}$  è l'inversa di  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$ .

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} g^{\nu\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\sigma} g_{\sigma\rho} = (\Lambda G^{-1} \tilde{\Lambda}) G$$

$$\Lambda G^{-1} \tilde{\Lambda} = (\tilde{\Lambda}^{-1} G \Lambda^{-1})^{-1} = (\tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda} G \Lambda \Lambda^{-1})^{-1} = G^{-1}$$

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} g^{\nu\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\sigma} g_{\sigma\rho} = g^{\mu\sigma} g_{\sigma\rho} = \mathbb{I}_{\rho}^{\mu}$$

A è un  **tensore controvariante di ordine 2**  se per 3.5 si ha che

$$\boxed{A'^{\mu\nu} = \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} A^{\rho\sigma}} \quad (3.9)$$

Consideriamo ad esempio il tensore  $g^{\mu\nu}$ . Vediamo qual è il suo trasformato

$$g'^{\mu\nu} = \Lambda_{\rho}^{\mu} g^{\rho\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\nu} = (\Lambda \mathcal{G}^{-1} \tilde{\Lambda})^{\mu\nu}$$

A questo punto sfruttiamo la solita condizione soddisfatta dalla  $\Lambda$

$$\mathcal{G} = \tilde{\Lambda} \mathcal{G} \Lambda \Rightarrow G^{-1} = \Lambda^{-1} \mathcal{G}^{-1} \tilde{\Lambda}^{-1} \Rightarrow \Lambda \mathcal{G}^{-1} \tilde{\Lambda} = \mathcal{G}^{-1}$$

Allora si vede subito che

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

Dunque la matrice  $\mathcal{G}$  è **invariante** per trasformazioni.

A è un  **tensore covariante di ordine 2**  se per 3.5 si ha che

$$\boxed{A'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} A_{\rho\sigma}} \quad (3.10)$$

Consideriamo ad esempio il tensore  $g_{\mu\nu}$ . Vediamo qual è il suo trasformato

$$g'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} g_{\rho\sigma} \Lambda_{\nu}^{\sigma} = (\hat{\Lambda} \mathcal{G}^{-1} \tilde{\Lambda})_{\mu\nu}$$

Sfruttando  $\hat{\Lambda} = \mathcal{G} \Lambda \mathcal{G}^{-1}$

$$\hat{\Lambda} \mathcal{G}^{-1} \tilde{\Lambda} = (\mathcal{G} \Lambda \mathcal{G}^{-1}) \mathcal{G} (\tilde{\mathcal{G}}^{-1} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathcal{G}}) = (\mathcal{G} \Lambda \mathcal{G}^{-1}) \mathcal{G} (\mathcal{G}^{-1} \tilde{\Lambda} \mathcal{G}) = \mathcal{G} \Lambda \mathcal{G}^{-1} \tilde{\Lambda} \mathcal{G} = \mathcal{G} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} = \mathcal{G}$$

Dunque anche  $g_{\mu\nu}$  è invariante.

A è un  **tensore misto di ordine 2**  se per 3.5 si ha che

$$\boxed{A'^{\nu}_{\mu} = \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} A^{\sigma}_{\rho}} \quad (3.11)$$

A è un  **tensore p-contravariante e q-contravariante**  se per 3.5 si ha che

$$\boxed{A'^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = \Lambda^{\rho_1}_{\mu_1} \Lambda^{\rho_2}_{\mu_2} \dots \Lambda^{\rho_p}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}_{\sigma_1} \Lambda^{\nu_2}_{\sigma_2} \dots \Lambda^{\nu_q}_{\sigma_q} A^{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_q}_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p}} \quad (3.12)$$

Oltre i tensori, esistono anche gli  **pseudo-tensori**  e la differenza dai primi sta nel modo in cui trasformano. In pratica è come abbiamo visto sin ora ma nella trasformazione entra il determinante della matrice della trasformazione. Dunque, ad esempio, uno pseudo-vettore in fisica non relativistica trasforma, con la 3.4

$$V'_i = \det R \, R_{ij} V_j$$

In fisica relativistica invece, prendiamo ad esempio uno pseudo-vettore contravariante

$$A'^{\mu} = \det \Lambda \, \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

**Definizione.** Definiamo lo  **pseudo-tensore di Levi-Civita**  di ordine 4 covariante nel modo seguente

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se si ottiene 0123 con un numero di permutazioni pari} \\ -1 & \text{se si ottiene 0123 con un numero di permutazioni dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ad esempio  $\varepsilon_{0231} = 1$ , mentre  $\varepsilon_{\mu\mu\rho\sigma} = 0$ .

**Proposizione 3.1.**  $\forall M$  matrice, è valida la formula

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\alpha}_{\mu} M^{\beta}_{\nu} M^{\gamma}_{\rho} M^{\delta}_{\sigma} = \det M \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Si vede subito dalla definizione che lo pseudo-tensore di Levi-Civita non può dipendere dal sistema di riferimento, dunque ci aspettiamo che con 3.5 sia invariante. Utilizzando il fatto che è uno pseudo-vettore e che soddisfa alla proposizione appena enunciata possiamo scrivere

$$\varepsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \Lambda \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Lambda^{\gamma}_{\rho} \Lambda^{\delta}_{\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \det \Lambda \det \hat{\Lambda} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = (\det \Lambda)^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Quindi l'aspettativa è confermata. Come abbiamo fatto per il tensore di ordine 4, si può fare per il tensore di ordine 3

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se si ottiene 123 con un numero di permutazioni pari} \\ -1 & \text{se si ottiene 123 con un numero di permutazioni dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Introduciamo qualche proprietà che sarà utile nel seguito, relativa al tensore di Levi-Civita. Supponiamo che, nel caso di quello del quarto ordine  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $\mu = 0$ . Allora il tensore è sicuramente nullo se anche uno degli altri indici è nullo, dunque

$$\varepsilon_{0\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{0ijk}$$

Allora scriveremo che

$$\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad (3.13)$$

É bene fare un esempio. Supponiamo di avere  $\varepsilon_{\nu\rho\sigma 0}$ , allora per arrivare a  $\varepsilon_{0\nu\rho\sigma}$  dobbiamo eseguire tre scambi, quindi un numero di permutazioni dispari. Allora

$$\varepsilon_{\nu\rho\sigma 0} = -\varepsilon_{0\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{0ijk} = -\varepsilon_{ijk}$$

Inoltre si può riscrivere il prodotto vettoriale di due vettori

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \quad (3.14)$$

Inoltre, è legato alla delta di Kronecher

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad (3.15)$$

### 3.3.1 Algebra Tensoriale

Analizziamo ora qualche proprietà e operazione tra tensori.

Dato un quadrivettore controvariante  $A^\mu$  e uno covariante  $B_\mu$ , **contraendo gli indici si ottiene uno scalare**, ossia un qualcosa di invariante per trasformazioni del tipo 3.5. Verifichiamolo

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\rho_\mu A^\nu B_\rho = \delta^\rho_\nu A^\nu B_\rho = A^\nu B_\nu = A^\mu B_\mu$$

Notiamo che in uno scalare possiamo alzare e abbassare gli indici a piacimento, infatti

$$A^\mu B_\mu = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = A_\nu B^\nu = A_\mu B^\mu$$

Notiamo inoltre che l'operazione è simile al prodotto scalare, che con la notazione di Einstein scriveremmo infatti

$$\langle a, b \rangle = a_i b^i = a_i b_i$$

Il prodotto scalare euclideo è semidefinito positivo, mentre quello tra quadrivettori non lo è, perché la metrica è data da  $g_{\mu\nu}$ . Infatti

$$A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^i B^i$$

poiché gli unici elementi di  $g_{\mu\nu}$  sono quelli sulla diagonale, e sono tutti  $-1$  tranne quello  $g_{00}$ . Allora per comodità nello scrivere la contrazione di quadrivettori utilizzeremo lo stesso simbolo del prodotto scalare, le parentesi o il punto, e addirittura  $A^2 = \langle A, A \rangle$ . Abbiamo quindi definito il **prodotto scalare in Minkowski**. Dal segno di  $A^2$  si ha una divisione tra quadrivettori

$$\text{sgn } A^2 = \begin{cases} > 0 & \text{quadrivettore di tipo tempo} \\ < 0 & \text{quadrivettore di tipo spazio} \\ = 0 & \text{quadrivettore di tipo luce} \end{cases}$$

Più in generale supponiamo di avere due tensori, il primo  $A$   $p_1$ -covariante e  $q_1$ -controvariante, il secondo  $B$   $p_2$ -covariante e  $q_2$ -controvariante. Supponiamo ora di poter contrarre  $n$  indici controvarianti del primo con  $n$  indici covarianti del secondo. Allora otterremo un tensore  $p_1 + p_2 - n$  covariante e  $q_1 + q_2 - n$  controvariante. Ad esempio

$$A^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho\sigma\tau} = C^\mu_{\sigma\tau}$$

In questo modo si possono effettuare tutte le combinazioni a piacere.

Fin ora abbiamo visto soltanto dei tensori che non dipendono dal punto dello spazio. In elettrodinamica vedremo però il campo elettrico e magnetico che possono dipendere dal punto in cui si calcola. Gli enti matematici che elenchiamo ora, scalari, quadrivettori, etc., trasformano allo stesso modo già visto ma bisogna ricordarsi qual è la variabile da cui dipendono.

Un **campo scalare** trasforma nel modo seguente

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (3.16)$$

Notare che la variabile è la stessa del sistema di riferimento in cui è definito il campo. Infatti, se volessimo i due campi con la stessa variabile, ricordando la trasformazione di Poincaré 3.5

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}(x' - a))$$

E a questo punto possiamo anche rinominare  $x' \rightarrow x$ .

Un **campo quadrivettoriale controvariante** trasforma nel modo seguente

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (3.17)$$

oppure

$$A'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}(x - a))$$

Per evitare di confondersi conviene dunque sempre scrivere la variabile di cui si parla, poiché una scrittura del genere

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x')$$

è totalmente errata.

Un esempio di campo quadrivettoriale covariante è dato dal **quadrigradiente**<sup>8</sup>

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

Verifichiamo che sia covariante: per la derivata della funzione composta

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

dove la composizione è data da

$$x^\nu = \Lambda^\nu_\mu (x'^\mu - a^\mu) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\nu_\mu$$

---

<sup>8</sup>Nota bene: il  $\mu$  è in basso nel primo membro, mentre nel secondo membro è in alto sulla variabile, ma alla stessa altezza (più o meno) dell'altro.

Dunque

$$\partial'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu$$

E per essere contratti i due indici devono essere vicini, dunque

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$$

Un esempio invece di campo quadrivettoriale controvariante è dato dal **differenziale**  $dx^\mu$ . La trasformazione si trova differenziando la trasformazione di Poincaré 3.5. Troviamo chiaramente che

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

Una domanda giunge chiaramente a chi prima d'ora non ha mai avuto a che fare con il formalismo covariante: perché utilizzare gli indici piuttosto che la notazione matriciale, quali sono i vantaggi? Un'equazione scritta in formalismo covariante che presenta tensori o campi vettoriale dello stesso tipo in ambo i membri si dice **covariante a vista** dunque sono automaticamente invarianti in forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Da qui si capisce che il formalismo covariante è il formalismo naturale che esprime il principio di relatività einsteniano.

# Capitolo 4

## Meccanica Relativistica

### 4.1 Cinematica e dinamica

Ci occupiamo ora della revisione della meccanica newtoniana in modo da trovare la formulazione covariante della stessa. Abbiamo in particolare dei requisiti per costruire una buona teoria, ossia che le formule devono essere covarianti a vista e per basse velocità vogliamo ritrovare la formulazione newtoniana. Sappiamo già che in relatività i punti  $x^\mu$  appartengono a uno spazio 3+1 dimensionale, lo spazio-tempo di Minkowski. Chiaramente in generale non saranno costanti, ma necessita una parametrizzazione. In meccanica newtoniana il parametro è il tempo, ma in questo caso non è l'ideale perché non è più un invariante.

Quando si ha a che fare con il moto di particelle massive (come nel nostro caso), vedremo che esse non possono viaggiare a velocità maggiori uguali a  $c$ , dunque una buona scelta di un parametro invariante è

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \int_a^b c dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2 c^2}} = c \int_a^b dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = c\tau$$

$s$  è l'intervallo spazio-temporale tra due punti  $a$  e  $b$  della linea di universo della particella in questione. Dall'uguaglianza notiamo che possiamo anche utilizzare il tempo proprio come parametro, a meno di un riscaldamento per  $c$ . Considerando gli infinitesimi

$$ds = cd\tau = c \frac{dt}{\gamma(t)}$$

dove  $t$  è il tempo dell'osservatore che rileva il moto della particella. Tratteremo dunque moti del tipo  $x^\mu(s)$ .

#### Quadrivelocità

Definiamo la quadrivelocità di un moto come

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}(s) = \frac{\gamma(t)}{c} \frac{dx^\mu}{dt}$$

scriviamo le componenti

$$u^0 = \frac{\gamma(t)}{c} \frac{dx^0}{dt} = \gamma(t) \quad u^i = \frac{\gamma(t)}{c} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\gamma(t)}{c} v^i(t)$$

Dunque la quadrivelocità in componenti è

$$u(t) = \left( \gamma(t), \frac{\gamma(t)}{c} v^i(t) \right) \quad (4.1)$$

Chiaramente dalla definizione si nota che è un quadriettore, poiché se  $dx^\mu$  trasforma come un quadriettore, anche la velocità trasforma allo stesso modo. Questo notato che  $ds$  è uno scalare dunque è invariante.

Si osserva anche che la quadrivelocità è a-dimensionale. Inoltre<sup>1</sup>

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

Dunque la quadrivelocità è un vettore unitario di tipo tempo.

### Quadriaccelerazione

Definiamo la quadriaccelerazione di un moto come

$$\omega^\mu = \frac{du^\mu}{ds}(s) = \frac{\gamma(t)}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma(t)}{c} \frac{dx^\mu}{dt} \right)$$

Per ricavare le componenti bisogna derivare

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{\gamma^4}{c^3} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \\ \omega^i &= \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} \left[ \frac{v^i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{\gamma^2}{c^2} a^i + \frac{\gamma^4}{c^4} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle v^i \end{aligned}$$

Allora la quadriaccelerazione in componenti

$$\omega = \left( \frac{\gamma^4}{c^3} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle, \frac{\gamma^2}{c^2} a^i + \frac{\gamma^4}{c^4} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle v^i \right) \quad (4.2)$$

Inoltre

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(u^\mu u_\mu)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_\mu u^\mu + u_\mu \omega^\mu = 2\omega^\mu u_\mu = 0$$

Questo ci dice che nello spazio tempo di Minkowski la quadrivelocità e la quadriaccelerazione sono vettori ortogonali.

### Quadrimento

---

<sup>1</sup>Omettendo la dipendenza temporale.



Definiamo il quadrimomento come

$$p^\mu = mcu^\mu = (p^0, p^i)$$

dove denotiamo  $p^i$  come impulso relativistico.

$$p^i = mc \frac{\gamma}{c} v^i = m\gamma v^i \xrightarrow{v \ll c} mv^i$$

dunque l'impulso relativistico per velocità piccole ritroviamo l'impulso che abbiamo utilizzato finora.

$$p^0 = mc\gamma$$

Dunque, riassumendo

$$P = (mc\gamma, m\gamma v^i) \quad (4.3)$$

La componente temporale del quadrimomento ha le dimensioni di energia/velocità. Allora definiamo l'**energia totale**

$$\mathcal{E} = cp^0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.4)$$

Notiamo che, a differenza di quanto accade in fisica newtoniana, se  $v = 0$  l'energia non è nulla, ma vale  $mc^2$  che è detta **energia a riposo**. Dunque una particella, per il solo fatto di avere massa, possiede energia.

Contraendo il quadrimomento con se stesso

$$P^\mu P_\mu = m^2 c^2$$

Scriviamo per esteso la contrazione con le componenti

$$P^\mu P_\mu = (p^0)^2 - (p^i p_i)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |p|^2$$

Allora

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 |p|^2} \quad (4.5)$$

dove  $p$  è l'impulso relativistico. Notiamo allora che se una particella ha massa nulla, ha energia ben definita, al contrario di quanto accadeva nel caso di fisica newtoniana<sup>2</sup>, e vale  $\mathcal{E} = c |p|$ . Allora

$$|v| = \frac{|p|}{m\gamma} = \frac{\mathcal{E}}{cm\gamma} = \frac{m\gamma c^2}{m\gamma c} = c$$

Dunque una particella priva di massa **deve** muoversi alla velocità della luce.

L'analogo dell'equazione di Newton in relatività è l'**equazione di Minkowski**

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \mathcal{F}^\mu \quad (4.6)$$

---

<sup>2</sup>Perché l'energia si scriveva  $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}$ .

dove al secondo membro abbiamo la cosiddetta **quadriforza**. Scriviamo le componenti

$$\mathcal{F}^i = \frac{\gamma}{c} \frac{dp^i}{dt} = \frac{\gamma}{c} F^i$$

La condizione che la quadriaccelerazione e la quadrivelocità siano ortogonali ci impone un vincolo sulla quadriforza, che dunque ha tre sole componenti indipendenti; infatti

$$u^\mu \mathcal{F}_\mu = mc \frac{du_\mu}{ds} u^\mu = mc \omega_\mu u^\mu = 0$$

Allora posso esplicitare lo scalare  $u^\mu \mathcal{F}_\mu = u^0 \mathcal{F}_0 + u^i \mathcal{F}_i$ <sup>3</sup>.

Infatti

$$u^0 \mathcal{F}^0 = \gamma \mathcal{F}^0 = -u^i (-\mathcal{F}^i) = \frac{\gamma^2}{c^2} F^i v^i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^0 = \frac{\gamma}{c^2} \langle F, v \rangle$$

Inoltre

$$\frac{\gamma}{c^2} \langle F, v \rangle = \frac{dp^0}{ds} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \langle F, v \rangle = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

dunque ritroviamo la **legge di potenza**.

Non è più vero che la forza è parallela all'accelerazione. Infatti

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{rel}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{d\gamma}{dt} m \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{p}_{non\ rel}}{dt}$$

che è la somma di un vettore parallelo alla velocità e uno parallelo all'accelerazione.

In assenza di forze esterne,  $\mathcal{F}^\mu = 0$ , dunque si conserva il quadrimomento poiché la sua derivata rispetto al parametro  $s$  è nulla. A priori però non è verificato se il sistema comprende più di una particella: in fisica newtoniana avevamo dimostrato che, in assenza di forze esterne, il momento totale del sistema era conservato come conseguenza del principio di azione e reazione che cancella il contributo delle forze interne. Il problema è che in relatività non può esistere il principio di azione e reazione poiché sottintende che la trasmissione dell'informazione della reazione sia istantanea, ossia a velocità infinita, il che non è possibile. Il fatto che il sistema di particelle conservi il suo momento è dovuto, come si vedrà in seguito, all'omogeneità e isotropia dello spazio.

## 4.2 Decadimenti

In generale in fisica relativistica non si conserva la massa di un sistema isolato, ma si conserva l'energia. Questo è il motivo per cui, se guardiamo nel limite di basse velocità l'espressione 4.4

$$\mathcal{E} \stackrel{v \ll c}{\approx} mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

ossia troviamo un termine aggiuntivo rispetto alla sola energia cinetica, poiché in relatività contiamo il fatto che un corpo, per il solo fatto di avere massa, ha energia. Questo

---

<sup>3</sup>Attenzione: il segno meno davanti allo scalare non c'è poiché gli indici sono uno alto e uno basso: nel caso volessi metterli entrambi alti devo inserire un  $g_{\mu\nu}$  che nelle componenti spaziali  $i$  tira fuori il solito segno meno della metrica.

permette di spiegare fenomeni come i decadimenti oppure processi come la fissione nucleare<sup>4</sup>, in cui si ha un'apparente non conservazione dell'energia. Se infatti definissimo l'energia sottraendo il termine che "disturba" il limite classico ( $mc^2$ ), in questi processi effettivamente l'energia non sarebbe conservata.

La non conservazione della massa + fisica quantistica permettono di spiegare i **decadimenti**, ossia processi del tipo

$$M \longrightarrow m_1 + m_2 + m_3 + \dots$$

dove non è detto che la somma delle  $m_i$  sia uguale a  $M$ . I decadimenti sono dei fenomeni in cui  $M$  "scompare" lasciando il posto ad altre particelle. Prima di cominciare a ricavare le relazioni che legano le quantità in gioco preciso che si pone  $c = 1$  come pure la carica del protone, dunque le masse sono espresse sempre in potenze di  $\text{eV}/c^2$ , i momenti in  $\text{eV}/c$  e le energie in  $\text{eV}$ . Inoltre denoterò  $p^1 = p_x$ ,  $p^2 = p_y$  e  $p^3 = p_z$ .

Consideriamo allora un decadimento come sopra, e sia  $\vec{P}$  l'impulso relativistico di  $M$  nel sistema di riferimento in cui si osserva il decadimento. Questo si conserva poiché il sistema è isolato. Supponiamo dunque che giaccia lungo l'asse  $x$  e vediamo se esiste una trasformazione di Lorentz con una velocità tale che il momento di  $M$  sia nullo. Chiaramente la risposta è intuitiva, e la velocità dev'essere pari alla velocità di  $M$ . Infatti considerando che  $P^\mu$  è un quadrivettore, possiamo trasformarlo con la matrice 3.3

$$p_x^* = \gamma(p_x - \beta p^0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{p_x}{p^0} = \frac{p_x}{\mathcal{E}} = \frac{m\gamma\beta_M}{m\gamma} = \beta_M$$

La scrittura ha senso se e solo se  $|\beta| < 1$ , ossia se  $|p_x| < |p^0|$ . Questo è chiaramente verificato per un vettore di tipo tempo, come in effetti il quadrimomento poiché  $P^\mu P_\mu = m^2 > 0$ . Quindi è sempre possibile trovare questo sistema di riferimento. Non è difficile convincersi che questo è il sistema di riferimento del **centro di massa** che, prima e dopo l'urto, non cambia la sua velocità. Infatti, se il quadrimomento si conserva, si conservano anche le componenti, dunque anche il rapporto  $\frac{p_x}{p^0}$ . Definiamo allora tutte le quantità associate alla  $i$ -esima particella con il pedice  $(i)$ . Allora possiamo scrivere

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_{(i)} = \sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)} \beta_{(i)} \quad \mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_{(i)} = \sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)}$$

Allora

$$\beta_{CM} = \frac{\sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)} \beta_{(i)}}{\sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)}} \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \frac{\sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)} v_{(i)}}{\sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)}} \quad (4.7)$$

Dall'ultimo membro possiamo definire la posizione del centro di massa tenendo presente che derivando voglio ottenere la formula scritta sopra

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)} x_{(i)}}{\sum_i m_{(i)} \gamma_{(i)}} \quad (4.8)$$

Dunque nel sistema di riferimento del centro di massa<sup>5</sup> il momento di  $M$  è nullo. Dunque  $P_\star^\mu = (p_\star^0, 0)$ . Allora siccome  $P^\mu P_\mu$  è un invariante

$$|p_\star^0| = \sqrt{P^\mu P_\mu} = M$$

<sup>4</sup>La formula, stabilendo l'equivalenza tra massa e energia, pone le basi per la creazione della bomba nucleare: da qui viene il gran successo della stessa.

<sup>5</sup>Tutte le quantità del centro di massa le indico con apice o pedice  $\star$ .

Che è chiaro se si pensa che la particella  $M$  nel sdr del (suo) centro di massa è ferma, dunque ha solo l'energia a riposo. Studiamo la condizione perché il decadimento sia possibile:

$$|p_\star^0| = M = \sum_i \mathcal{E}_{(i)} = \sum_i \sqrt{|p_{(i)}^\star|^2 + m_{(i)}^2} \geq \sum_i m_i$$

Dunque perché il fenomeno possa accadere la somma delle masse dei prodotti dev'essere al più  $M$ . Il caso limite in cui la somma delle masse dei prodotti coincide con la massa della particella che decade è detta **produzione in soglia** e corrisponde al caso in cui  $p_{(i)}^\star = 0 \ \forall i$ , dunque i prodotti sono tutti fermi nel sistema di riferimento del centro di massa.

#### 4.2.1 Decadimento a due corpi $M \longrightarrow m_1 + m_2$

Dal caso generale passiamo ora a una situazione più semplice da trattare, ossia il caso che i prodotti sono due. Dimostriamo ora che, date le masse, tutte le variabili nel centro di massa (energia, momento) sono determinate a meno dell'angolo di emissione delle particelle, rispetto alla linea di volo di  $M$ , nel sistema di riferimento del centro di massa. In quest'ultimo sappiamo che

$$\vec{p}_1^\star + \vec{p}_2^\star = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_1^\star| = |\vec{p}_2^\star| = p^\star$$

Possiamo allora scrivere l'energia delle due particelle

$$\mathcal{E}_1^\star = \sqrt{m_1^2 + p_\star^2} \quad \mathcal{E}_2^\star = \sqrt{m_2^2 + p_\star^2}$$

Per la conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}_M^\star = M = \mathcal{E}_1^\star + \mathcal{E}_2^\star \quad (*)$$

Possiamo inoltre scrivere

$$\mathcal{E}_1^\star - \mathcal{E}_2^\star = \frac{(\mathcal{E}_1^\star)^2 - (\mathcal{E}_2^\star)^2}{\mathcal{E}_1^\star + \mathcal{E}_2^\star} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} \quad (\diamond)$$

$$(*) + (\diamond) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_1^\star = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}} \quad \boxed{\mathcal{E}_2^\star = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}} \quad (4.9)$$

da cui ricaviamo il momento

$$p^\star = \sqrt{\frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)M^2}{4M^2}} \quad (4.10)$$

Per trovare energia e impulso nel laboratorio, detta  $\beta$  la velocità della particella  $M$  e dunque del centro di massa, possiamo effettuare una trasformazione di Lorentz all'indietro

$$\mathcal{E}_{1,2} = \gamma (\mathcal{E}_{1,2}^\star + \beta p^\star \cos \theta_{1,2}^\star) \quad p_{1,2} = \gamma (p^\star \cos \theta_{1,2}^\star + \beta \mathcal{E}_{1,2}^\star)$$

Si vede subito che lo spettro di energie è limitato. Ad esempio per la particella 1 abbiamo un massimo quando l'angolo di emissione è nullo, mentre si ha un minimo quando l'angolo

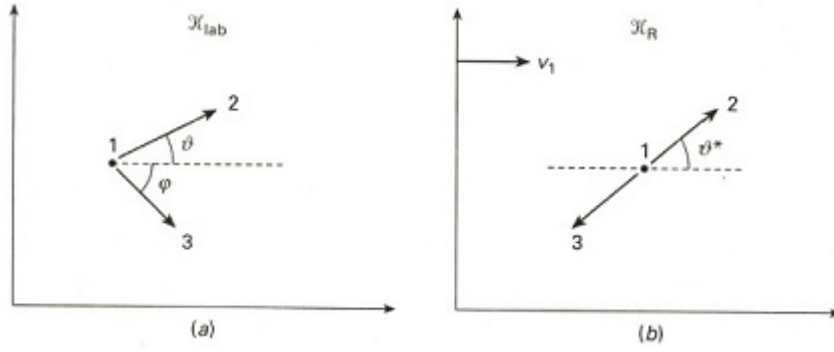


Figura 4.1: (a) decadimento nel laboratorio. (b) decadimento nel centro di massa.

di emissione è  $\pi$ . La situazione è quella rappresentata in figura 4.2.1. Si ha chiaramente, per la conservazione del quadrimomento, che  $\theta_2^* = \theta_1^* - \pi$  (preso in verso orario), mentre nel laboratorio a priori non abbiamo informazioni sugli angoli  $\theta$  e  $\phi$ . Definiamo allora  $p_{\alpha x}$  e  $p_{\alpha y}$  le proiezioni del momento nel laboratorio della particella  $\alpha$ -esima al variare di  $\theta_1^* = \theta^*$ . Utilizzando le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} p_{\alpha x} = \gamma(p^* \cos \theta_\alpha^* + \beta \mathcal{E}_\alpha^*) & (*) \\ p_{\alpha y} = p^* \sin \theta_\alpha^* & (**) \end{cases}$$

Sommando i quadrati di (\*) e (\*\*)

$$\left( \frac{p_{\alpha x}}{\gamma} - \beta \mathcal{E}_\alpha^* \right)^2 + p_{\alpha y}^2 = (p^*)^2 \cos^2 \theta_\alpha^* + (p^*)^2 \sin^2 \theta_\alpha^*$$

E ricaviamo

$$\frac{(p_{\alpha x} - \gamma \beta \mathcal{E}_\alpha^*)^2}{\gamma^2 (p^*)^2} + \frac{p_{\alpha y}^2}{(p^*)^2} = 1$$

Quest'ultima equazione ci dice che le componenti del momento giacciono su un'ellisse di centro  $(c_\alpha = \gamma \beta \mathcal{E}_\alpha^*, 0)$  e semiassi  $s_x = p^* \gamma$  e  $s_y = p^*$ . Si presentano dunque due casi topologicamente diversi: se  $c_\alpha < s_x$  allora tutti gli angoli di emissione nel laboratorio sono permessi, poiché l'origine è interno all'ellisse

Se invece  $c_\alpha > s_x$  allora non tutti gli angoli sono permessi. Notiamo che se l'angolo massimo esiste, può essere al più  $\frac{\pi}{2}$ , ossia il caso limite in cui l'ellisse è tangente all'asse  $y$ . La particella è dunque emessa solo in avanti, e la condizione geometrica equivale a

$$\beta \gamma \mathcal{E}_\alpha^* > p^* \gamma \quad \Rightarrow \quad \beta > \frac{p^*}{\mathcal{E}_\alpha^*} = \beta_\alpha^*$$

dove  $\beta_\alpha^*$  è la velocità della particella  $\alpha$ -esima nel centro di massa. Possiamo trovare facilmente una relazione tra l'angolo di emissione nel centro di massa e quello nel laboratorio

$$\tan \theta_\alpha = \frac{p_{\alpha x}}{p_{\alpha y}} = \frac{p^* \sin \theta_\alpha^*}{\gamma(p^* \cos \theta_\alpha^* + \beta \mathcal{E}_\alpha^*)} = \frac{\sin \theta_\alpha^*}{\gamma \left( \cos \theta_\alpha^* + \frac{\beta}{\beta_\alpha^*} \right)} \quad (4.11)$$

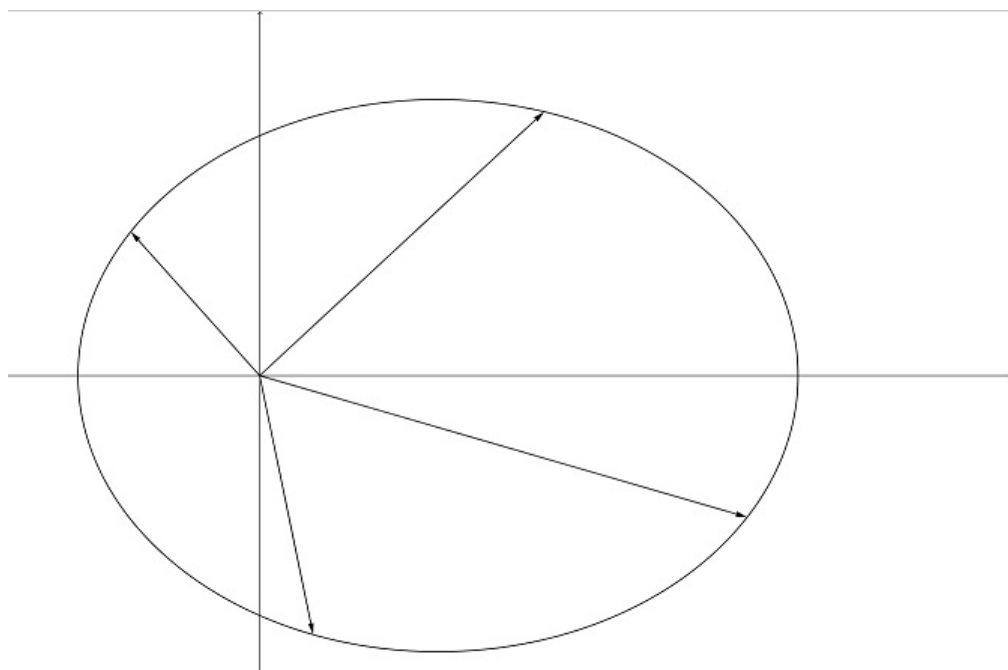


Figura 4.2: È possibile tracciare qualsiasi vettore partendo dall'origine, dunque tutti gli angoli sono permessi.

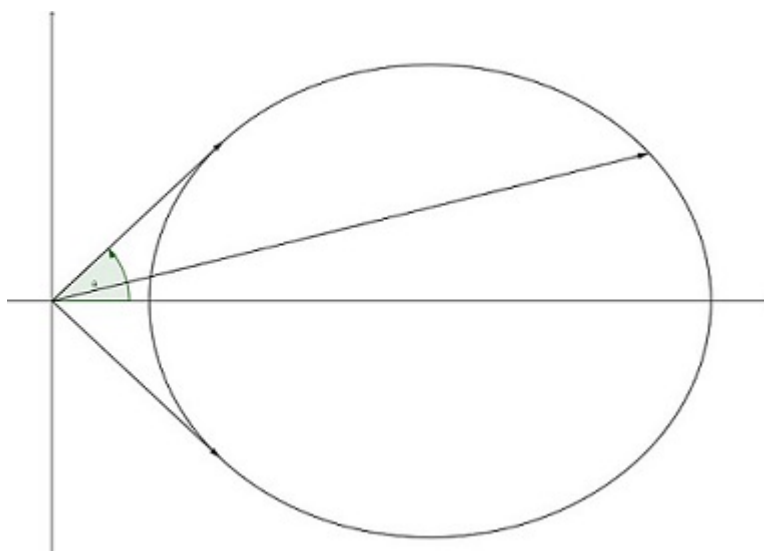


Figura 4.3: L'angolo in verde è l'angolo massimo possibile.

Per trovare l'angolo massimo basta calcolare la derivata rispetto all'angolo  $\theta_\alpha^*$  e imporre l'annullamento. Si arriva a

$$\cos \theta_{\alpha \max}^* = -\frac{\beta_\alpha^*}{\beta} \quad (4.12)$$

ove si intende il valore del coseno quando siamo in condizione di angolo massimo **nel laboratorio**. Sostituendo nella 4.11 troviamo

$$\tan \theta_{\alpha \max} = \frac{\beta_\alpha^*}{\gamma \sqrt{\beta^2 - (\beta_\alpha^*)^2}}$$

Possiamo però trovare una formula più semplice ricordando che

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} & \gamma \beta &= \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \\ \Rightarrow \sin \theta_{\alpha \max} &= \frac{\tan \theta_{\alpha \max}}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_{\alpha \max}}} = \frac{\beta_\alpha^*}{\gamma \sqrt{\beta^2 - (\beta_\alpha^*)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\beta_\alpha^*)^2}{\gamma^2 (\beta^2 - (\beta_\alpha^*)^2)}}} \\ \Rightarrow \sin \theta_{\alpha \max} &= \frac{\beta_\alpha^*}{\sqrt{\gamma^2 (\beta^2 - (\beta_\alpha^*)^2) + (\beta_\alpha^*)^2}} = \frac{\beta_\alpha^*}{\sqrt{(\beta_\alpha^*)^2 (1 - \gamma^2) + \gamma^2 \beta^2}} = \frac{\beta_\alpha^* \gamma_\alpha^*}{\gamma \beta} \end{aligned}$$

Moltiplicando e dividendo per  $m_\alpha$

$$\sin \theta_{\alpha \max} = \frac{p^*}{m_\alpha \gamma \beta} \quad (4.13)$$

### 4.2.2 Caso $m_1 = m_2$

Consideriamo ora che i prodotti abbiano ugual massa  $m$ , dunque ora, oltre ad avere uguale momento in modulo nel centro di massa, hanno anche la stessa energia nel medesimo sistema di riferimento.

$$p^* = \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \quad (4.14)$$

$$\mathcal{E}^* = \frac{M}{2} \quad (4.15)$$

Siamo quindi interessati a studiare l'angolo di emissione<sup>6</sup> tra le due particelle. Sappiamo che  $\theta_2^* = \pi - \theta_1^*$ , dunque sappiamo che sussistono le seguenti relazioni

$$\sin \theta^* = \sin \theta_1^* = -\sin \theta_2^*$$

$$\cos \theta^* = \cos \theta_1^* = -\cos \theta_2^*$$

Allora possiamo scrivere

$$\tan \theta_\alpha = \frac{\sin \theta^*}{\gamma \left( \cos \theta^* \pm \frac{\beta}{\beta^*} \right)}$$

---

<sup>6</sup>Attenzione: prima abbiamo ricavato le formule per l'angolo di emissione tra la particella  $\alpha$ -esima e la linea di volo della particella decadente.

dove il  $+$  corrisponde alla particella 1, il  $-$  alla particella 2. Consideriamo ora che, se calcoliamo  $\theta_2$  e prendiamo il valore compreso tra 0 e  $\pi$  allora è come se lo stessi contando in verso orario. Dunque l'angolo di emissione tra i prodotti è  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ . Allora

$$\begin{aligned}
 \tan \theta &= \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{\frac{\sin \theta^*}{\gamma \left( \cos \theta^* + \frac{\beta}{\beta^*} \right)} - \frac{\sin \theta^*}{\gamma \left( \cos \theta^* - \frac{\beta}{\beta^*} \right)}}{1 + \frac{\sin^2 \theta^*}{\gamma^2 \left( \cos^2 \theta^* - \frac{\beta^2}{(\beta^*)^2} \right)}} \\
 &= \gamma \frac{\sin^2 \theta^* \left( \cos^2 \theta^* - \frac{\beta^2}{(\beta^*)^2} - \sin^2 \theta^* \left( \cos^2 \theta^* + \frac{\beta^2}{(\beta^*)^2} \right) \right)}{\gamma^2 \left( \cos^2 \theta^* - \frac{\beta^2}{(\beta^*)^2} \right) + \sin^2 \theta^*} \\
 &= \frac{-2\gamma \frac{\beta}{\beta^*} \sin \theta^*}{\gamma^2 (1 - \sin^2 \theta^*) - \gamma^2 \frac{\beta^2}{(\beta^*)^2} + \sin^2 \theta^*} = \frac{-2\gamma \frac{\beta}{\beta^*} \sin \theta^*}{\beta^2 \gamma^2 \left( \frac{1}{\beta^2} + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 \beta^2} \sin^2 \theta^* - \frac{1}{\beta_*^2} \right)} \\
 &= \frac{-2 \frac{1}{\beta^* \beta \gamma} \sin \theta^*}{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta_*^2} - \sin^2 \theta^*}
 \end{aligned}$$

Definendo allora

$$A = 2 \frac{1}{\beta^* \beta \gamma} \quad B = \frac{1}{\beta_*^2} - \frac{1}{\beta^2} \quad (4.16)$$

possiamo scrivere

$$\tan \theta = \frac{A \sin \theta^*}{B + \sin^2 \theta^*} \quad (4.17)$$

A questo punto per capire come varia l'angolo nel laboratorio in funzione di quello nel centro di massa bisogna studiare la funzione dell'equazione 4.17. Innanzitutto notiamo che il coefficiente  $A > 0$ , mentre il coefficiente  $B$  non ha segno definito. Abbiamo quindi quattro casi diversi:

1.  $B \in (-\infty; 1] \Rightarrow \beta < \beta \gamma < \beta_*$
2.  $B \in [-1, 0] \Rightarrow \beta < \beta_* < \beta \gamma$
3.  $B \in [0, 1] \Rightarrow \beta_* < \beta < \beta_* \gamma$
4.  $B \in [1, \infty) \Rightarrow \beta_* < \beta_* \gamma < \beta$

La funzione si azzerava quando  $\theta^* = 0, \pi$ , e in questi casi l'angolo tra i prodotti è nullo. La funzione esplode poi nei punti tali che  $\theta^* = \arcsin(\pm \sqrt{-B})$ , ma soltanto nel caso 2; allora in questa situazione l'angolo nel laboratorio è sempre  $\frac{\pi}{2}$ . Deriviamo la funzione per studiare i punti critici

$$(\tan \theta)' = A \cos \theta^* \frac{B - \sin^2 \theta^*}{B + \sin^2 \theta^*}$$



dunque abbiamo, in tutti e 4 i casi,  $\bar{\theta}_* = \frac{\pi}{2}$  mentre, solo nel caso 3,  $\tilde{\theta}^* = \arcsin(\pm\sqrt{B})$ . Calcoliamo la funzione nei punti critici<sup>7</sup>

$$\tan \theta \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \frac{\beta_*}{\beta\gamma}}{1 - \left( \frac{\beta_*}{\beta\gamma} \right)^2} \Rightarrow \boxed{\tan \frac{\theta}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\beta_*}{\beta\gamma}} \quad (4.18)$$

$$\tan \theta \left( \tilde{\theta}_* \right) = \pm \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \beta_*^2}} \quad (4.19)$$

Se siamo nella situazione di  $\theta^* = \bar{\theta}^*$  allora entrambi gli angoli di emissione delle particelle con la linea di volo della particella decadente, nel centro di massa, sono  $\frac{\pi}{2}$  dunque c'è simmetria nell'emissione in questo sistema di riferimento. Essendo dunque massa, energia e momento uguali per entrambe le particelle, la simmetria nell'emissione si deve conservare anche nel laboratorio poiché nella trasformazione di Lorentz entrano solo queste variabili. Vediamo i grafici della funzione nei quattro casi

1.  $B \in (-\infty; 1]$ . In questo caso  $\beta < \beta^*$  dunque tutti gli angoli di emissione delle particelle rispetto alla linea di volo di quella decaduta sono possibili. Inoltre si verifica che a  $\bar{\theta}^*$  c'è un minimo, maggiore di  $\frac{\pi}{2}$ . Ricordo che c'è simmetria di emissione in questa situazione.

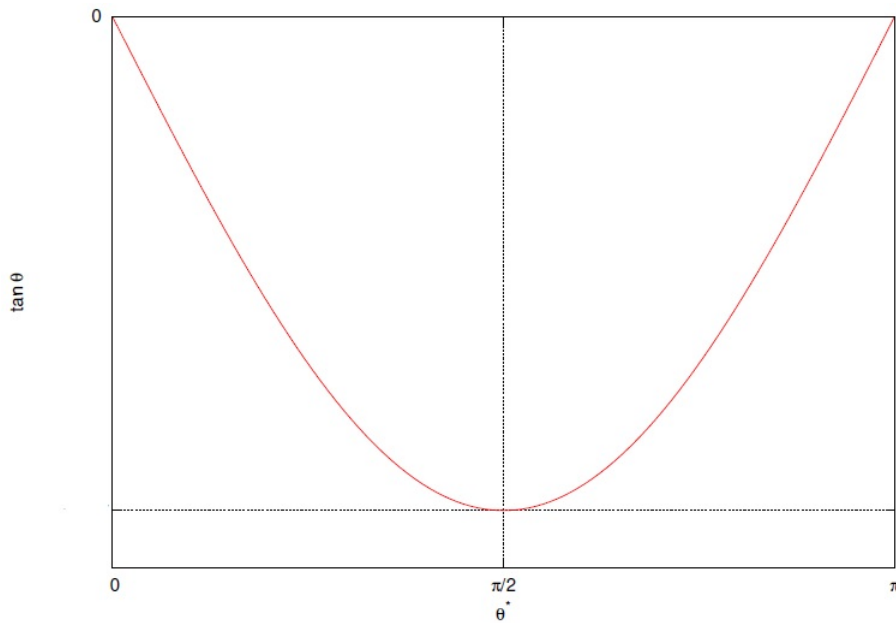


Figura 4.4:

---

<sup>7</sup>Ricordando che  $\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

Il minimo è dato dalla formula 4.18, e gli angoli permessi nel laboratorio sono i seguenti evidenziati in celeste

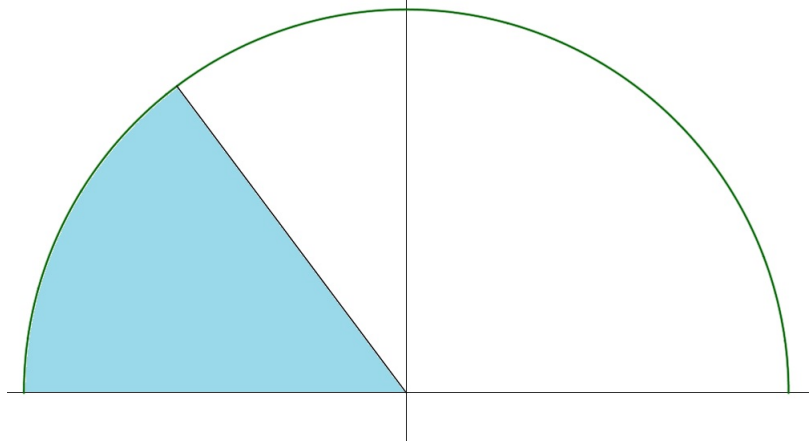


Figura 4.5:

2.  $B \in [-1, 0]$ . In questo caso  $\beta < \beta^*$  dunque tutti gli angoli di emissione delle particelle rispetto alla linea di volo di quella decaduta sono possibili. Inoltre si verifica che a  $\bar{\theta}^*$  c'è un minimo, stavolta minore di  $\frac{\pi}{2}$ . Ricordo che c'è simmetria di emissione in questa situazione.

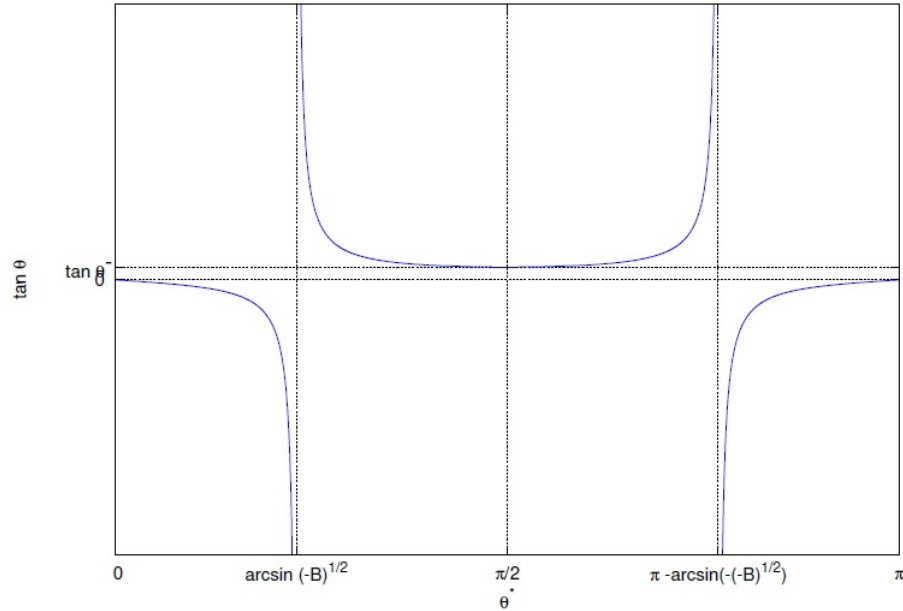


Figura 4.6:

Il minimo è dato ancora dalla formula 4.18, e gli angoli permessi nel laboratorio sono i seguenti evidenziati in celeste

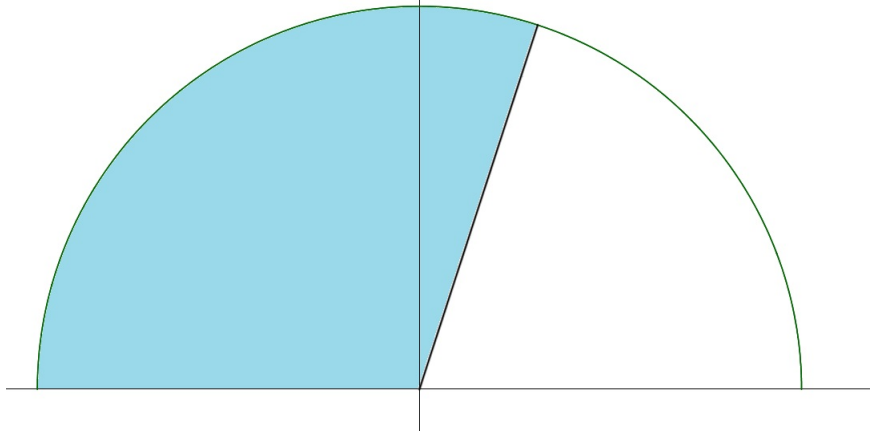


Figura 4.7:

3.  $B \in [0, 1]$ . In questo caso  $\beta > \beta^*$  dunque non tutti gli angoli di emissione delle particelle rispetto alla linea di volo di quella decaduta sono permessi. Inoltre si verifica che ci sono due massimi a  $\tilde{\theta}^*$  (uno con il + e uno con il -) e un minimo a  $\bar{\theta}^*$ . Il massimo è minore di  $\frac{\pi}{2}$ , e in questi punti non abbiamo simmetria di emissione nel laboratorio. La simmetria invece rimane se l'angolo tra le particelle è quello minimo.

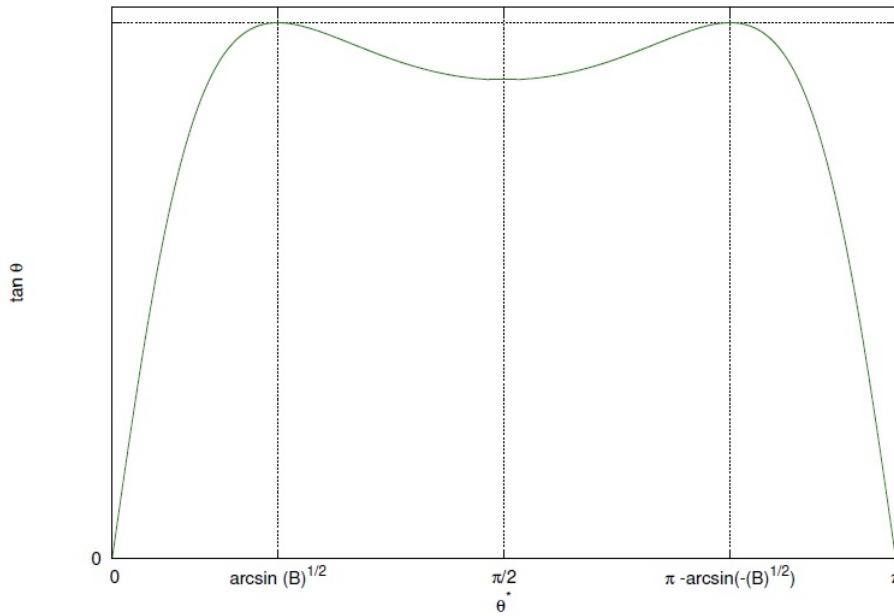


Figura 4.8:

Il massimo è dato dalla formula 4.19, mentre il minimo ancora dalla 4.18. Gli angoli permessi nel laboratorio sono i seguenti evidenziati in celeste

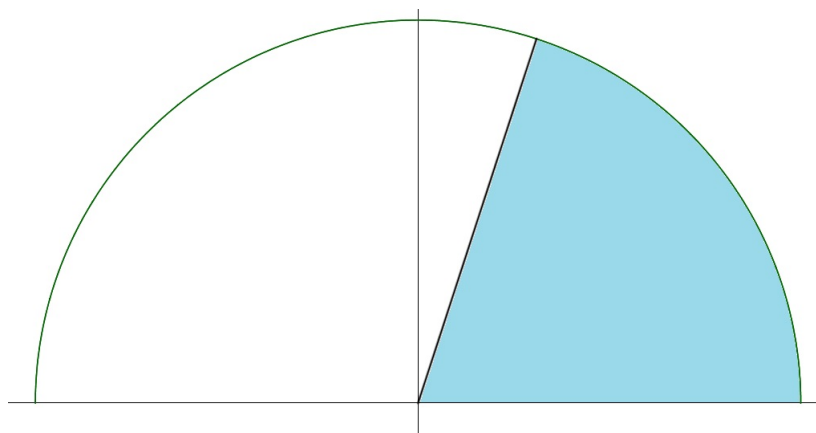


Figura 4.9:

4.  $B \in [1, \infty)$ . In questo caso  $\beta > \beta^*$  dunque non tutti gli angoli di emissione delle particelle rispetto alla linea di volo di quella decaduta sono permessi. Inoltre si verifica che esiste un massimo a  $\bar{\theta}^*$  dato dalla formula 4.18 e minore di  $\frac{\pi}{2}$ . In questa configurazione (all'angolo massimo) abbiamo simmetria di emissione nel laboratorio e gli angoli permessi sono rappresentati ancora dalla figura 4.9.

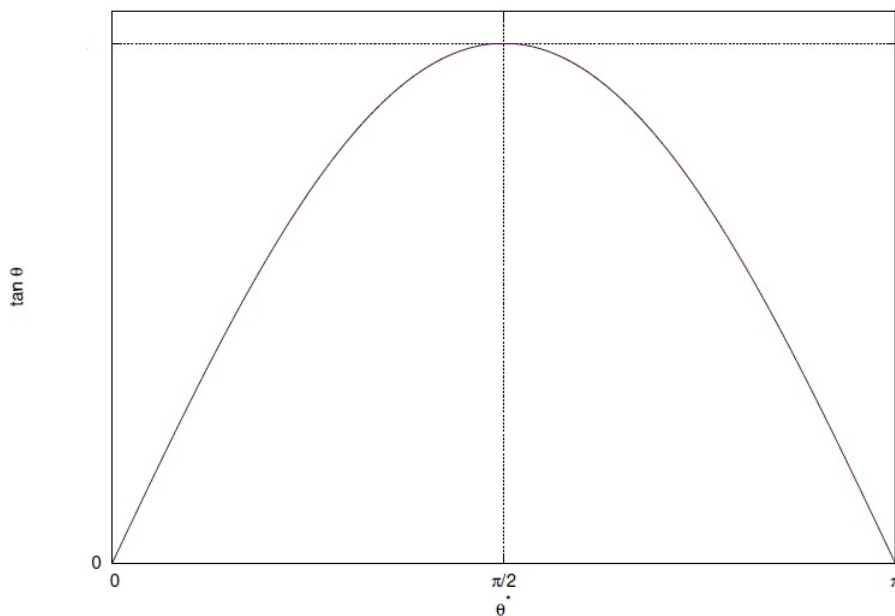


Figura 4.10:

### 4.2.3 Distribuzione di probabilità del decadimento

Supponiamo ora di avere  $K$  particelle che decadono e assumiamo che la legge di decadimento sia di tipo esponenziale

$$K(t) = K_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.20)$$

con  $t$  il tempo nel sistema solidale alla particelle che decadono e  $\tau$  il tempo di vita medio nello stesso. Supponiamo ora di voler studiare la distribuzione di probabilità dell'energia delle  $N$  particelle prodotte dal decadimento. Allora diciamo che

$$dN(\mathcal{E}) = \text{numero di particelle prodotte tra } \mathcal{E} \text{ e } \mathcal{E} + d\mathcal{E}$$

Definiamo allora la **frazione di particelle emesse** tra  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$

$$d\chi(\mathcal{E}) = \frac{dN}{N}(\mathcal{E})$$

che non corrisponde ad altro che alla probabilità. Allora la densità di probabilità in  $d\mathcal{E}$  sarà

$$\rho(\mathcal{E}) = \frac{d\chi(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}}$$

Consideriamo ora la situazione nel sistema di riferimento del centro di massa. Qui la probabilità di emissione è isotropa: è lecito pensare che non ci sia qui una direzione privilegiata visto che la massa decadente è ferma. Quindi nel centro di massa le particelle vengono emesse uniformemente in ogni direzione. Consideriamo una sfera di raggio  $R$  di centro  $M$ .

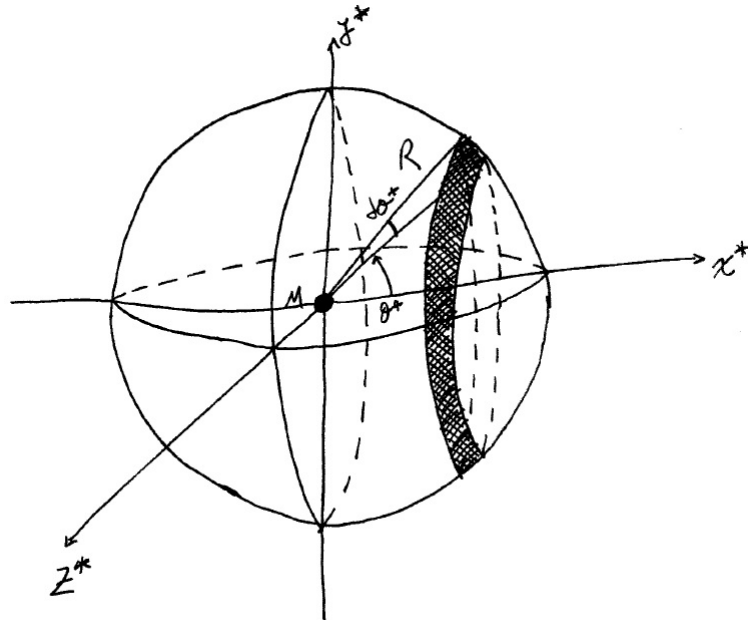


Figura 4.11:

Consideriamo ora  $d\chi(\theta^*)$ , la frazione di particelle emesse tra  $\theta^*$  e  $\theta^* + d\theta^*$ . Siccome la probabilità di emissione è isotropa e le reazioni avvengono tutte su dei piani (anche

diversi) non è difficile convincersi che anche ruotando intorno all'asse  $x^*$  la situazione sia la stessa. Si ha infatti invarianza per rotazioni intorno all'asse di volo. Se così non fosse non sarebbe possibile che la probabilità di emissione sia isotropa. Allora possiamo considerare tutta la striscia evidenziata nella figura 4.11. La frazione di particelle emesse in quell'intervallo angolare sarà pari al numero di particelle emesse nella striscia diviso per il numero di particelle emesse su tutta la sfera. Definiamo inoltre  $\sigma$  la densità di particelle emesse per unità di superficie.<sup>8</sup>

$$d\chi(\theta^*) = \frac{\sigma 2\pi R \sin \theta^* R d\theta^*}{4\pi R^2 \sigma} = \frac{1}{2} \sin \theta^* d\theta^* = \frac{1}{2} d(\cos \theta^*)$$

Possiamo ora mettere in relazione l'energia nel laboratorio con l'angolo nel centro di massa con una trasformazione di Lorentz, definendo  $\beta$  la velocità del centro di massa.

$$\mathcal{E} = \gamma(\mathcal{E}^* + \beta p^* \cos \theta^*)$$

Differenziando ambo i membri troviamo che

$$d\mathcal{E} = \gamma \beta p^* d(\cos \theta^*)$$

Allora

$$\rho(\mathcal{E}) = \frac{d\chi(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}} = \frac{d\chi}{d(\cos \theta^*)} \frac{d(\cos \theta^*)}{d\mathcal{E}} = \frac{1}{2\gamma \beta p^*}$$

Che è costante ed indipendente dall'angolo di emissione nel laboratorio.

Verifichiamo che sia una densità di probabilità. È positiva, dobbiamo quindi controllare che sia normalizzata. Sappiamo che  $\mathcal{E}_{max} = \gamma(\mathcal{E}^* + \beta p^*)$  e  $\mathcal{E}_{min} = \gamma(\mathcal{E}^* - \beta p^*)$ . Allora

$$\int_{\mathcal{E}_{min}}^{\mathcal{E}_{max}} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{2\gamma \beta p^*} = 1$$

dunque è normalizzata.

## 4.3 Urti

Gli urti in meccanica relativistica si dividono in due tipologie

- **elastici:** le particelle entranti sono le medesime di quelle uscenti, ma chiaramente cambia l'energia e il momento prima e dopo l'urto.
- **anelastici:** le particelle entranti non sono le stesse di quelle uscenti ma il quadri-momento totale si conserva prima e dopo l'urto.

---

<sup>8</sup>Nell'ultimo passaggio dei calcoli ci dovrebbe essere, penso, un segno meno davanti al differenziale del coseno. Ancora non mi è chiaro perché si può ometterlo, ma semplicemente cambierebbe il fatto che avremmo una densità di probabilità negativa che non ci piace.

### 4.3.1 Urti elastici

In questo paragrafo ci limitiamo alla trattazione degli urti elastici nel caso di una situazione del tipo

$$m_1 + m_2 \longrightarrow m_1 + m_2$$

Denotiamo tutte le grandezze dopo l'urto con un apice, mentre le grandezze prima dell'urto senz'apice. Allora innanzitutto ci chiediamo quante variabili indipendenti ci sono. Tutte le variabili sono le componenti dei quadrimomenti, dunque 16 variabili. Abbiamo però 4 leggi di conservazione, una per ciascuna componente

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

Abbiamo inoltre quattro invarianti dati dalla contrazione dei quadrimomenti con se stessi

$$(p_1^\mu)^2 = m_1^2 \quad (p_2^\mu)^2 = m_2^2 \quad (p_1'^\mu)^2 = m_1^2 \quad (p_2'^\mu)^2 = m_2^2$$

E inoltre possiamo ruotare il sdr in modo tale da scegliere gli assi e fare dei boost in modo tale da metterci in condizioni in cui, ad esempio, uno dei momenti (relativistici) è nullo. Questa arbitrarietà delle 6 possibili trasformazioni di Lorentz ci dà altri 6 vincoli. Dunque

$$16 - 4 - 4 - 6 = 2$$

ci sono dunque 2 variabili indipendenti.

Spesso per risolvere i processi d'urto si utilizzano le **variabili di Mandelstam**

$$s := (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 \stackrel{*}{=} (p_1'^\mu + p_2'^\mu)^2 \quad t := (p_1'^\mu - p_1^\mu)^2 \stackrel{*}{=} (p_2'^\mu - p_2^\mu)^2 \quad u := (p_2'^\mu - p_1'^\mu)^2 \stackrel{*}{=} (p_2^\mu - p_1^\mu)^2$$

dove i passaggi  $*$  sono giustificati dalla conservazione del quadrimomento. Abbiamo però detto che le variabili indipendenti sono 2: dunque ci deve essere una relazione tra le tre variabili di Mandelstam.

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1^\mu)^2 + (p_2^\mu)^2 + 2p_1^\mu p_{2\mu} + (p_1'^\mu)^2 + (p_1^\mu)^2 - 2p_1'^\mu p_1^\mu + (p_1^\mu)^2 + (p_2'^\mu)^2 - 2p_2'^\mu p_1^\mu \\ &= 4m_1^2 + 2m_2 + 2p_1^\mu (p_2^\mu - p_1'^\mu - p_2'^\mu) = 4m_1^2 + 2m_2 - 2p_1^\mu p_{1\mu} \\ &= 2(m_1^2 + m_2^2) \end{aligned}$$

Dunque effettivamente date due delle variabili di Mandelstam la terza è fissata. Vediamo ora il dominio delle tre variabili; per il **dominio di  $s$**  valutiamola nel centro di massa, dato che  $\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$

$$s = (p_{*1}^\mu + p_{*2}^\mu)^2 = (\mathcal{E}_1^* + \mathcal{E}_2^*)^2 = \left( \sqrt{p_*^2 + m_1^2} + \sqrt{p_*^2 + m_2^2} \right)^2 \geq (m_1 + m_2)^2$$

poiché il minimo della funzione si ha per  $p^* = 0$ . Dunque abbiamo trovato che

$$s \in [(m_1 + m_2)^2, +\infty)$$

**Osservazione.** Il momento relativistico totale del sistema è chiaramente nullo prima e dopo l'urto nel sistema del centro di massa e dunque il modulo è uguale per entrambe le

particelle, prima e dopo l'urto. Se scriviamo la conservazione dell'energia, ossia la prima componente del quadrimomento

$$\sqrt{p_\star^2 + m_1^2} + \sqrt{p_\star^2 + m_2^2} = \sqrt{p_\star'^2 + m_1^2} + \sqrt{p_\star'^2 + m_2^2}$$

siccome sono funzioni monotone crescenti in  $p_\star$  e  $p_\star'$  per verificare l'uguaglianza deve succedere che  $p_\star = p_\star'$ .

Sapendo ciò, per trovare il **dominio di  $t$**  calcoliamola nel centro di massa

$$t = (p_{1\star}' - p_{1\star})^2 = (\mathcal{E}_{1\star}' - \mathcal{E}_{1\star})^2 - (p_{1\star}' - p_{1\star})^2$$

rappresentiamo la situazione per capire quanto vale il secondo addendo

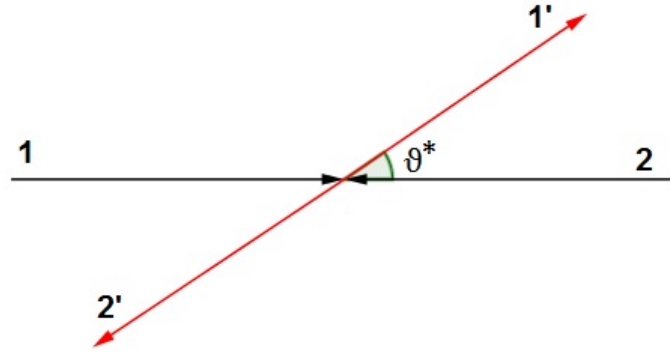


Figura 4.12:

dunque

$$(p_{1\star}' - p_{1\star})^2 = p_\star^2 + p_\star^2 - 2\langle p_{1\star}', p_{1\star} \rangle = 2p_\star^2 - 2p_\star^2 \cos \theta^\star = 2p_\star^2(1 - \cos \theta^\star)$$

Ora, siccome il momento relativistico delle particelle prima e dopo l'urto è lo stesso, anche l'energia rimarrà la stessa (nel centro di massa). Dunque

$$t = -2p_\star^2(1 - \cos \theta^\star)$$

siccome il coseno è sempre minore o uguale ad 1,  $t$  sarà al più nulla. Dunque il dominio  $t \in (-\infty, 0]$ .

Anche nel caso della  $u$ , valutiamola nel centro di massa. I calcoli sono simili a quanto fatto precedentemente, dunque

$$u = (\mathcal{E}_{2\star}' - \mathcal{E}_{1\star})^2 - 2p_\star^2(1 + \cos \theta^\star) = \left( \sqrt{p_\star^2 + m_2^2} - \sqrt{p_\star^2 + m_1^2} \right)^2 - 2p_\star^2(1 + \cos \theta^\star)$$

Il secondo addendo dà sempre un contributo negativo, e per  $p^\star$  grandi il primo addendo è sostanzialmente nullo. Dunque il limite inferiore della  $u$  è  $-\infty$ . Il primo addendo invece ha il massimo a  $p^\star = 0$ <sup>9</sup> dunque il limite superiore è  $(m_2^2 - m_1^2)^2$ . In definitiva il dominio è  $u \in \left( -\infty, (m_2^2 - m_1^2)^2 \right]$ .

<sup>9</sup>Basta fare derivate oppure direttamente plottare la funzione e risulta simile, in forma, a una gaussiana centrata in 0.



### Urto a bersaglio fermo

Ci occupiamo ora del caso in cui una delle due masse, prima dell'urto, è ferma. Volendo rappresentare la situazione

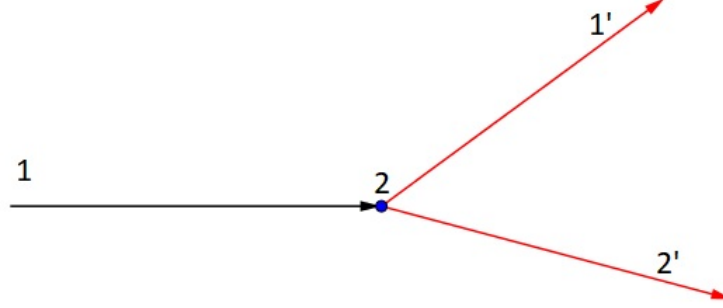


Figura 4.13:

In questo caso la conservazione dell'energia si scrive

$$\mathcal{E}_1 + m_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

Sfruttiamo l'invarianza delle variabili  $s$  e  $t$  per trovare  $\mathcal{E}'_1$  e  $p^*$  in funzione di  $\mathcal{E}_1$  e  $\theta^*$ , ove quest'ultimo è l'angolo di uscita rispetto alla linea di volo della particella 1<sup>10</sup>.

$$s_{lab} = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = (m_1^2 + m_2^2) + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle) = m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2$$

$$s_{cm} = \left( \sqrt{p_\star^2 + m_1^2} + \sqrt{p_\star^2 + m_2^2} \right)^2 = 2p_\star^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{p_\star^2 + m_1^2} \sqrt{p_\star^2 + m_2^2}$$

Imponendo ora l'invarianza  $s_{lab} = s_{cm}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 m_2 &= p_\star^2 + \sqrt{p_\star^2 + m_1^2} \sqrt{p_\star^2 + m_2^2} \\ (\mathcal{E}_1 m_2 - p_\star^2)^2 &= (p_\star^2 + m_1^2)(p_\star^2 + m_2^2) \\ p_\star^4 - 2\mathcal{E}_1 m_2 p_\star^2 + \mathcal{E}_1^2 m_2^2 &= p_\star^4 + p_\star^2 m_2^2 + m_1^2 p_\star^2 + m_1^2 m_2^2 \end{aligned}$$

Il che implica

$$p_\star^2 = \frac{m_2^2 (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2} \quad (4.21)$$

Utilizziamo ora l'invarianza della variabile  $t$  per ricavare l'energia della particella 1 dopo l'urto in funzione di  $\mathcal{E}_1$  e  $\theta^*$

$$\begin{aligned} t_{lab} &= (p_2'^\mu - p_2^\mu)^2 = (\mathcal{E}_2' - m_2)^2 - (\vec{p}')^2 = \mathcal{E}_2'^2 + m_2^2 - 2\mathcal{E}_2' m_2 - (\vec{p}')^2 = 2m_2 (m_2 - \mathcal{E}_2') \\ t_{cm} &= (p_{2\star}'^\mu - p_{2\star}^\mu)^2 = (p_{1\star}'^\mu - p_{1\star}^\mu)^2 = -2p_\star^2 (1 - \cos \theta^*) \end{aligned}$$

Utilizzando la conservazione dell'energia + l'invarianza di  $t$

$$2m_2 (m_2 - \mathcal{E}_2') = 2m_2 (\mathcal{E}_1' - \mathcal{E}_1) = -2p_\star^2 (1 - \cos \theta^*)$$

<sup>10</sup>Si nota già qualche analogia con i decadimenti..

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{p_\star^2}{m_2} (1 - \cos \theta^\star) \quad (4.22)$$

da cui si ricavano facilmente i valori massimo e minimo di  $\mathcal{E}'_1$ , rispettivamente quando  $\theta^\star = 0, \pi$

$$\mathcal{E}'_{1max} = \mathcal{E}_1 \quad \mathcal{E}'_{1min} = \mathcal{E}_1 - \frac{2p_\star^2}{m_2}$$

Le formule per la particella 2 si trovano facilmente con la conservazione dell'energia. Sempre trattando il caso di urto a bersaglio fermo, ci interessa studiare il luogo geometrico in cui vivono  $\vec{p}'_1$  e  $\vec{p}'_2$ , analogamente a quanto fatto con i decadimenti. In quest'ultimo caso, ricordo, avevamo trovato che i momenti delle particelle emesse dovevano stare su un'ellisse. Si possono ripercorrere gli stessi calcoli e trattare l'urto come un decadimento considerando il centro di massa, prima dell'urto, come la particella che decade. La **massa equivalente** è data dalla contrazione del quadrimomento e non è la somma delle masse di  $m_1$  e  $m_2$

$$M^2 = P^\mu P_\mu = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2$$

Inoltre, il centro di massa avrà momento relativistico prima dell'urto pari a  $\vec{p}_1$  poiché la particella 2 non si muove. Avrà invece energia pari a  $\mathcal{E}_1 + m_2$ , dunque la sua velocità sarà

$$\beta = \frac{|\vec{p}_1|}{\mathcal{E}_1 + m_2}$$

Denotiamo allora il momento relativistico delle particelle dopo l'urto con  $\vec{p}'_\alpha$  con  $\alpha = 1, 2$ . Allora con le convenzioni prese il luogo geometrico è ancora un ellisse, per gli angoli di emissione si hanno le stesse formule e la stessa casistica già incontrate per i decadimenti. Per convincerci del fatto che l'urto è equivalente a un decadimento, ricaviamo di nuovo  $p^\star$ . Sappiamo che la massa  $m_2$  nel laboratorio è ferma, dunque nel sdr avrà modulo del momento dato dalla trasformazione di Lorentz

$$p_\star = \gamma \beta m_2 = \frac{m_2 |\vec{p}_1|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2}} = \frac{m_2 \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2}}$$

Studiamo la condizione per cui si abbia angolo di emissione massimo tra la particella  $\alpha$ -esima e la linea di volo della particella 1. Nel caso del decadimento avevamo trovato  $s_x < c_\alpha$ . Sicuramente per la particella 2 non c'è scelta: verrà sicuramente emessa in avanti, ma vediamo che<sup>11</sup>

$$c_2 = \beta \gamma \mathcal{E}_2^\star = \beta \gamma (\gamma m_2) = \gamma (\beta \gamma m_2) = \gamma p^\star = s_x$$

quindi la particella 2 avrà come angolo massimo  $\frac{\pi}{2}$ . Per la particella 1 invece, il caso in cui essa venga emessa solo in avanti  $s_x < c_1$  si riduce a

$$s_x = \gamma p^\star = m_2 \beta \gamma^2 < \beta \gamma \sqrt{(m_2 \beta \gamma)^2 + m_1^2} = \beta \gamma \mathcal{E}_1 = c_1$$

elevando al quadrato

$$m_2^2 \gamma^2 < m_2^2 \beta^2 \gamma^2 m_1^2 \rightarrow m_1 > m_2$$

quindi se la massa della particella ferma è più piccola di quella incidente allora quest'ultima sarà sicuramente emessa in avanti. In caso contrario sono possibili tutti gli angoli.

<sup>11</sup>Noto che l'energia della particella 2, nel centro di massa, prima dell'urto, è data sempre da una trasformazione di Lorentz.

**Nota**

Il metodo utilizzato in cui si considera l'urto come un decadimento è una valida strada anche nel caso in cui la particella 2 non sia ferma. La massa equivalente sarà, in generale, nel caso di un urto in cui le particelle incidano con un angolo  $\theta$

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta$$

In questo caso però bisogna fare attenzione al fatto che il centro di massa viaggerà in modo rettilineo, ma in generale non sulla bisettrice dell'angolo  $\theta$ . In questo caso conviene calcolarsi le componenti della velocità del centro di massa e dedurre l'angolazione.

# Capitolo 5

## Elettromagnetismo

### 5.1 Equazioni di Maxwell

Finora abbiamo ridefinito la meccanica classica in modo tale da renderla compatibile con i postulati della relatività speciale. Utilizzando il formalismo covariante abbiamo posto le basi per una nuova meccanica.

L'elettromagnetismo invece è già compatibile con i postulati, visto che, ad esempio, le trasformazioni di Lorentz sono nate per rendere le equazioni di Maxwell invarianti. Riscrivendolo però in formalismo covariante si scoprono nuovi aspetti, come l'unificazione del campo magnetico ed elettrico in un unico ente.

Le equazioni di Maxwell, scritte nel sistema MKS<sup>1</sup> sono

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

In relatività però la forma più conveniente per scrivere le equazioni è quella del **sistema di Gauss** che utilizza le seguenti convenzioni

$$\begin{cases} \rho_{MKS} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \rho_G \\ j_{MKS} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = j_{MKS} \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = j_G \\ cB_{MKS} = B_G \end{cases}$$

In questo modo il campo elettrico e magnetico hanno la stessa unità di misura. Le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Meter-Kilogram-Second.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La legge di forza di Lorentz invece sarà

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Ora, abbiamo già visto che si introducono il potenziale vettore e scalare così definiti

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

Ricordo inoltre che, il campo elettrico e magnetico così definiti sono invarianti per trasformazioni di Gauge, ossia i potenziali

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} - \nabla \psi \\ \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases} \quad (5.1)$$

generano ancora gli stessi  $E$  e  $B$  per ogni funzione  $\psi$ . Ricordando che  $\partial_0 = \partial^0$  e  $\partial_i = -\partial^i$ , e definendo

$$A^\mu = \left( \phi, \vec{A} \right) \quad (5.2)$$

le 5.1 si possono riscrivere in un'unica equazione

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \psi$$

chiamiamo l'ente 5.2 **quadripotenziale**.

Definiamo ora il **tensore elettromagnetico**, di ordine 2 controvariante

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (5.3)$$

e si vede subito che è anti-simmetrico per costruzione. Questo implica che gli elementi sulla diagonale sono tutti nulli. Troviamo gli altri elementi

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial ct} = E_i$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_k = -B_k$$

Da quest'ultima possiamo definire la seguente formula

$$F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k \quad (5.4)$$

La rappresentazione matriciale del tensore è dunque

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

come si vede dunque il tensore elettromagnetico rappresenta l'unificazione in un unico ente del campo elettrico e del campo magnetico. Per cambio di sistema di riferimento (con una trasformazione di Lorentz dunque) il campo magnetico ed elettrico si mescolano e il primo può trasformarsi nel secondo e viceversa.

Riscriviamo ora le equazioni di Maxwell in forma covariante. Le equazioni omogenee (quelle in cui compaiono solo  $E$  e  $B$  e non termini aggiuntivi) si possono scrivere

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \quad (5.6)$$

convinciamoci della scrittura innanzitutto<sup>2</sup> L'indice libero è  $\mu$  che può essere nullo o meno. Allora se poniamo  $\mu = 0$  perché il tensore di Levi-Civita non si annulli gli altri indici devono essere  $ijk$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0ijk}\partial^i F^{jk} &= \varepsilon_{ijk}\partial^i F^{jk} = \varepsilon_{ijk}\partial^i (-\varepsilon_{jkl}B_l) = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl}\partial^i B_l = -\varepsilon_{kji}\varepsilon_{jkl}\partial^i B_l \\ &= -2\delta_{il}\partial^i B_l = -2\partial^i B_i = 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Ponendo ora  $\mu = i$  lo 0 può stare nelle altre 3 posizioni

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} &= \varepsilon_{i0jk}\partial^0 F^{jk} + \varepsilon_{ij0k}\partial^j F^{0k} + \varepsilon_{ijk0}\partial^j F^{k0} \\ &= -\varepsilon_{0ijk}\partial^0 F^{jk} + \varepsilon_{0ijk}\partial^j F^{0k} + -\varepsilon_{0ijk}\partial^j F^{k0} \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial^0 F^{jk} + \varepsilon_{ijk}\partial^j F^{0k} + -\varepsilon_{ijk}\partial^j F^{k0} \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl}\partial^0 B_l + -2\varepsilon_{ijk}\partial^j F^{k0} = 2\delta_{il}\partial^0 B_l - 2\varepsilon_{ijk}\partial^j E_k \\ &= 2\delta_{il}\partial_0 B_l + 2\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k = 2\partial_0 B_i + 2(\vec{\nabla} \times \vec{E})_i = 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned}$$

Si può mostrare che le equazioni di Maxwell omogenee, scritte in termini del quadripotenziale sono un'identità del tipo  $0 = 0$ . Preliminarmente definiamo la seguente notazione: se un tensore<sup>3</sup>  $A_{\mu\nu\rho\sigma}$  è **anti-simmetrico** in  $\mu\nu$  allora lo denotiamo

$$A_{[\mu\nu]\rho\sigma}$$

se invece lo stesso tensore è **simmetrico** in  $\mu\nu$  allora lo denotiamo

$$A_{\{\mu\nu\}\rho\sigma}$$

La contrazione di un tensore simmetrico con uno antisimmetrico entrambi negli indici contratti da 0. Infatti

$$A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\nu\mu} \stackrel{\mu \rightarrow \nu}{\stackrel{\nu \rightarrow \mu}{=}} -A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \Rightarrow A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$$

dove nel primo uguale abbiamo scambiato gli indici, nel secondo li abbiamo rinominati. Scriviamo ora le equazioni di Maxwell omogenee in termini del quadripotenziale

$$0 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu \partial^\rho A^\sigma - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu \partial^\sigma A^\rho$$

<sup>2</sup>É bene ricordarsi delle proprietà del tensore di Levi-Civita.

<sup>3</sup>L'esempio prende un tensore del 4 ordine ma vale per ordine generico.

Nel secondo addendo cambiamo il nome agli indici  $\rho$  e  $\sigma$ , scambiandoli, praticamente

$$0 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma = 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma = 2\varepsilon_{\mu[\nu\rho]\sigma} \partial^{\{\nu} \partial^{\rho\}} A^\sigma = 0$$

Prima di passare alle equazioni di Maxwell non omogenee definiamo la **quadricorrente** (campo quadri-tensoriale)

$$j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x)) \quad (5.7)$$

Allora le equazioni in forma covariante sono

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c} j^\nu(x) \quad (5.8)$$

Verifichiamole: ponendo  $\nu = 0$ , l'altro indice non può altro che essere latino o il tensore campo elettromagnetico è nullo

$$\partial_i F^{i0} = \partial_i E_i = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

Ponendo invece  $\nu = i$

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = -\partial_j \varepsilon_{jik} B_k - \partial_0 E_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E_i \\ \Rightarrow \quad \left( \vec{\nabla} \times \vec{B} \right)_i - \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j_i \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ora, sappiamo che il moto di una particella in campo elettromagnetico è governato dalla legge di forza di Lorentz e dalla legge di potenza

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \vec{E} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

In forma covariante si riscrivono sotto forma di un'unica equazione

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (5.9)$$

Verifichiamolo: se  $\mu = 0$   $\nu$  non può essere altro che un indice latino

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e}{c} F^{0i} (-u^i) = \frac{e}{c} E_i \frac{\gamma}{c} v^i \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Se  $\mu = i$

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{ds} &= \frac{\gamma}{c} \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} F^{i0} u_0 + \frac{e}{c} F^{ij} u_j = \frac{e}{c} \left( E_i \gamma + (-\varepsilon_{ijk} B_k) \left( \frac{-\gamma}{c} v^j \right) \right) = \frac{\gamma}{c} \left( E_i + \varepsilon_{ijk} \frac{v_j B_k}{c} \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} &= \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

## 5.2 Trasformazioni del tensore elettromagnetico

Ci occupiamo ora di trattare come trasforma il tensore campo elettromagnetico sotto una trasformazione di Lorentz. Chiaramente trasforma come un tensore del secondo ordine. A differenza della meccanica classica, in cui passando da un sdr all'altro cariche possono risultare ferme o no, e dunque creare corrente e campo magnetico, in relatività la trasformazione del tensore dà già la giusta combinazione di campo elettrico e magnetico, quasi senza "pensare". Ricordiamo la regola per trasformare i campi tensoriali

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x) \quad \Leftrightarrow \quad F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}(x' - a))$$

ricordo anche che bisogna stare attenti alle variabili, ed è sempre bene indicarle. Occupiamoci ora di un caso particolare: trasformazione di Lorentz lungo la direzione dell'asse  $x$ . La matrice  $\Lambda$  in questo caso è

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo ora la regola

$$\begin{aligned} F'^{01}(x') &= -E'_1(x') = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^1{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x) \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_\sigma F^{0\sigma}(x) + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_\sigma F^{1\sigma}(x) \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_0 F^{00}(x) + \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01}(x) + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10}(x) + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_1 F^{11}(x) \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01}(x) + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_1 F^{11}(x) \\ &= -\gamma^2 E_1(x) + \beta^2 \gamma^2 E_1(x) = -E_1(x) \end{aligned}$$

dunque il campo elettrico nella direzione del boost non cambia.

$$\begin{aligned} F'^{02}(x') &= -E'_2(x') = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x) \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_\sigma F^{0\sigma}(x) + \Lambda^0{}_1 \Lambda^2{}_\sigma F^{1\sigma}(x) = \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_2 F^{02}(x) + \Lambda^0{}_1 \Lambda^2{}_2 F^{12}(x) \\ &= -\gamma E_2(x) + \beta \gamma B_3(x) \end{aligned}$$

Le altre componenti si trovano in modo del tutto analogo, e senza riportare i calcoli

$$\begin{cases} E'_1(x') = E_1(x) \\ E'_2(x') = \gamma(E_2(x) - \beta B_3(x)) \\ E'_3(x') = \gamma(E_3(x) + \beta B_2(x)) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1(x') = B_1(x) \\ B'_2(x') = \gamma(B_2(x) + \beta E_3(x)) \\ B'_3(x') = \gamma(B_3(x) - \beta E_2(x)) \end{cases} \quad (5.10)$$

come si può vedere dunque i campi elettrico e magnetico si mescolano come sola conseguenza della cinematica.

A questo punto è lecito chiedersi se esistono degli invarianti utilizzando combinazioni di  $F^{\mu\nu}$ . Si mostra che ci sono **2 invarianti indipendenti**: uno di questi è la contrazione del tensore elettromagnetico con se stesso

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij}$$



Ricordando che

$$F^{i0} = -F_{i0} \quad F^{ij} = F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$$

e che  $F^{\mu\nu}$  è anti-simmetrico, possiamo scrivere

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F^{i0} F_{i0} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} B_k B_l = -2E^2 + 2\delta_{kl} B_k B_l = 2(B^2 - E^2)$$

L'altro invariante è invece  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ , e vediamo a cosa corrisponde. Il conto è faticoso, ma basta ricordare le varie proprietà del tensore di Levi-Civita. Ricordo che solo un indice può essere singolarmente nullo, e gli altri saranno allora  $ijk$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} &= \varepsilon_{0ijk} F^{0i} F^{jk} + \varepsilon_{i0jk} F^{i0} F^{jk} + \varepsilon_{ij0k} F^{ij} F^{0k} + \varepsilon_{ijk0} F^{ij} F^{k0} \\ &= \varepsilon_{0ijk} F^{0i} F^{jk} - \varepsilon_{0ijk} F^{i0} F^{jk} + \varepsilon_{0ijk} F^{ij} F^{0k} - \varepsilon_{0ijk} F^{ij} F^{k0} \\ &= \varepsilon_{ijk} F^{0i} F^{jk} - \varepsilon_{ijk} F^{i0} F^{jk} + \varepsilon_{ijk} F^{ij} F^{0k} - \varepsilon_{ijk} F^{ij} F^{k0} \\ &= 2\varepsilon_{ijk} (F^{0i} F^{jk} + F^{ij} F^{0k}) \\ &= 2\varepsilon_{ijk} ((-E_i)(-\varepsilon_{jkl} B_l) + (-\varepsilon_{ijm} B_m)(-E_k)) \\ &= 2\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jkl} E_i B_l + 2\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijm} B_m E_k \\ &= 4\delta_{il} E_i B_l + 4\delta_{km} B_m E_k = 4E_i B_i + 4B_k E_k = 8E_i B_i \\ &= 8\langle \vec{E}, \vec{B} \rangle \end{aligned}$$

Consideriamo d'ora in poi il caso di campi magnetici costanti (nel tempo) e uniformi (nello spazio). Dunque  $E$  e  $B$  non dipendono dal punto dello spazio tempo, in alcun sistema di riferimento. Si ha la seguente casistica

1.  $\langle \vec{E}, \vec{B} \rangle = 0$  e  $B^2 - E^2 < 0$ . Allora esiste un sistema di riferimento in cui  $B' = 0$ .
2.  $\langle \vec{E}, \vec{B} \rangle = 0$  e  $B^2 - E^2 = 0$ .
3.  $\langle \vec{E}, \vec{B} \rangle = 0$  e  $B^2 - E^2 > 0$ . Allora esiste un sistema di riferimento in cui  $E' = 0$ .
4.  $\langle \vec{E}, \vec{B} \rangle \neq 0$ . Allora esiste un sistema di riferimento in cui campo magnetico ed elettrico sono paralleli.

Il secondo caso è complicato e non lo trattiamo. Analizziamo i restanti tre.

**1:** Campo elettrico e magnetico sono perpendicolari. Dunque possiamo scegliere un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  tale che

$$\vec{E} = (0, E, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$

Eseguiamo ora una trasformazione di Lorentz lungo  $x$ : con le formule 5.10 troviamo che

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 = 0 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) = \gamma(E - \beta B) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 = 0 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) = 0 \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) = \gamma(B - \beta E) \end{cases}$$

Imponiamo ora che  $B'_3 = 0$ . Troviamo che la velocità del boost deve essere  $\beta = \frac{B}{E}$ , che è sicuramente minore di 1 se siamo nel caso trattato.

**3:** Campo elettrico e magnetico sono perpendicolari. Dunque possiamo scegliere un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  tale che

$$\vec{E} = (0, E, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$

Eseguiamo ora una trasformazione di Lorentz lungo  $x$ : con le formule 5.10 troviamo che

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 = 0 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) = \gamma(E - \beta B) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 = 0 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) = 0 \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) = \gamma(B - \beta E) \end{cases}$$

Imponiamo ora che  $E'_2 = 0$ . Troviamo che la velocità del boost deve essere  $\beta = \frac{E}{B}$ , che è sicuramente minore di 1 se siamo nel caso trattato.

**4:** Campo elettrico e magnetico non sono perpendicolari, ma esiste un piano che li contiene. Dunque possiamo scegliere un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  tale che

$$\vec{E} = (0, E_2, E_3) \quad \vec{B} = (0, B_2, B_3)$$

Eseguiamo ora una trasformazione di Lorentz lungo  $x$ : con le formule 5.10 troviamo che

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 = 0 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 = 0 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{cases}$$

Imponiamo ora che  $\vec{E}' \times \vec{B}' = 0$ . L'unica componente non nulla è  $E'_2 B'_3 - B'_2 E'_3 = 0$ . Svolgiamo i calcoli

$$\begin{aligned} & \gamma^2 (E_2 - \beta B_3) (B_3 - \beta E_2) - \gamma^2 (E_3 + \beta B_2) (B_2 + \beta E_3) = 0 \\ \Rightarrow & (E_2 B_3 - B_2 E_3) - \beta (E_2^2 + B_2^2 + B_3^2 + E_3^2) + \beta^2 (E_2 B_3 - B_2 E_3) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{(\vec{E} \times \vec{B})_x}{E^2 + B^2} = \frac{\beta}{1 + \beta^2} \end{aligned}$$

Dopo aver notato che anche  $\beta$  è in direzione  $x$ , dunque ha anch'essa componenti  $y$  e  $z$  nulle possiamo scrivere, più in generale

$$\Rightarrow \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{E^2 + B^2} = \frac{\vec{\beta}}{1 + \beta^2} \quad *$$

Però sappiamo che  $|\beta| < 1$ , dunque la funzione

$$\frac{|\beta|}{\beta^2 + 1}$$

è limitata. Siccome è monotona crescente in  $[0, 1]$ , e in 1 ha un punto di massimo, allora l'intervallo sarà

$$0 \leq \frac{|\beta|}{\beta^2 + 1} < \frac{1}{2}$$

Verifichiamo dunque che anche il modulo del primo membro dell'uguaglianza \* sia limitato nello stesso intervallo. Sicuramente è maggiore di 0, e

$$\frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{E^2 + B^2} = \frac{|E||B|\sin\theta}{E^2 + B^2} < \frac{|E||B|}{E^2 + B^2} \leq \frac{1}{2} \frac{E^2 - B^2}{E^2 + B^2} \leq \frac{1}{2} \frac{E^2 + B^2}{E^2 + B^2} = \frac{1}{2}$$

dunque esiste il sistema di riferimento con  $E'$  e  $B'$  paralleli, con velocità che si ricava dall'uguaglianza \*.

## 5.3 Moto di particelle in campo elettromagnetico

Trattiamo ora il problema di particelle cariche in campo elettromagnetico. In questo corso ci interessano soltanto i casi in cui una particella si muova in campo elettrico costante e uniforme, o campo magnetico costante e uniforme. I casi che verranno proposti saranno riconducibili a queste due situazioni con delle trasformazioni di Lorentz, come abbiamo appena visto.

### 5.3.1 Moto in campo elettrico

La legge del moto si ricava dalla 5.9. Se  $\mu = i$ , deve essere  $\nu = 0$  perché abbiamo solo campo elettrico. Allora

$$\frac{\gamma}{c} \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} F^{i0} u_0 = \frac{e\gamma}{c} E_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dp^i}{dt} = eE_i}$$

Se invece  $\mu = 0$ , deve essere  $\nu = i$

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{e}{c} F^{0i} u_i \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\langle \vec{E}, \vec{v} \rangle}$$

Senza perdere di generalità supponiamo che il campo elettrico sia diretto come l'asse  $x$  e che  $\vec{p}_0$ , il momento iniziale della particella, sia sul piano  $(x, y)$ . Allora dalla legge di Lorentz

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= eE \quad \Rightarrow \quad p_x(t) = eEt + p_{0x} \\ \frac{dp_{y,z}}{dt} &= 0 \quad \Rightarrow \quad p_y(t) = p_{0y} \quad p_z(t) = 0 \end{aligned}$$

Ora la differenza sostanziale con il caso classico è che il momento non è  $mv$ . Ponendo  $c = 1$  e  $p_{0x}\hat{u}_x + p_{0y}\hat{u}_y = \vec{p}_0$  possiamo invece scrivere

$$\frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} = \vec{v} = \frac{e\vec{E}t + \vec{p}_0}{\sqrt{(e\vec{E}t + \vec{p}_0)^2 + m^2}}$$

Per semplificare i calcoli scegliamo l'origine dei tempi affinché  $p_{0x} = 0$ , ossia è sufficiente il cambio  $t' = t + \frac{p_{0x}}{eE}$ . Allora suddividiamo lo studio nelle componenti  $x$  e  $y$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e\vec{E}t}{\sqrt{(eEt + \vec{p}_0)^2 + m^2}} = \frac{e\vec{E}t}{\sqrt{eEt + \mathcal{E}_0^2}} = \frac{1}{eE} \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{eEt + \mathcal{E}_0^2} \right]$$

Allora la legge oraria si trova integrando da  $t = 0$  a un generico  $t$

$$x - x_0 = \frac{1}{eE} \left( \sqrt{eEt + \mathcal{E}_0^2} - \mathcal{E}_0 \right) \quad (5.11)$$

Per quanto riguarda invece la componente  $y$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_{0y}}{\sqrt{eEt + \mathcal{E}_0^2}} = \frac{p_{0y}}{\mathcal{E}_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{eE}{\mathcal{E}_0}t + 1}} = \frac{p_{0y}}{eE} \frac{d}{dt} \left[ \text{settsinh} \left( \frac{eE}{\mathcal{E}_0} t \right) \right]$$

Dunque la legge oraria è

$$y - y_0 = \frac{p_{0y}}{eE} \text{settsinh} \left( \frac{eE}{\mathcal{E}_0} t \right) \quad (5.12)$$

Possiamo ora trovare la traiettoria compiuta dalla particella: definendo per semplicità la costante

$$k = (y - y_0) \frac{eE}{p_{0y}}$$

dalla 5.12 ricaviamo

$$\frac{eE}{\mathcal{E}_0} t = \sinh k$$

che possiamo sostituire nella 5.11

$$x - x_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left( \sqrt{\sinh^2 k + 1} - 1 \right) = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} (\cosh k - 1)$$

dunque la traiettoria compiuta dalla particella sotto l'influenza del campo elettrico è una **catenaria**

$$x - x_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left( \cosh \left( (y - y_0) \frac{eE}{p_{0y}} \right) - 1 \right) \quad (5.13)$$

In fisica newtoniana sappiamo che la traiettoria è una parabola<sup>4</sup>. Se ora non contiamo più in unità di  $c$ , la costante  $k$  è adimensionale, dunque

$$k = (y - y_0) \frac{eE}{cp_{0y}}$$

Nel limite in cui  $c \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow 0$  dunque possiamo sviluppare il coseno iperbolico in serie di Taylor

$$\cosh k \sim 1 + \frac{k^2}{2}$$

Inoltre<sup>5</sup> per  $c \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{E}_0 \rightarrow mc^2$  e  $p_{0y} \rightarrow mv_0$

$$x - x_0 = (y - y_0)^2 \frac{eE\mathcal{E}_0}{2p_{0y}^2 c^2} = (y - y_0)^2 \frac{eEmc^2}{2m^2 v_0^2 c^2} = \frac{1}{2} \frac{eE}{mv_0^2} (y - y_0)^2$$

che è effettivamente la parabola che ci aspettiamo.

<sup>4</sup>Se il campo elettrico è costante è uniforme alla fine è come un moto dei gravi.

<sup>5</sup>Ricordare le formule 4.4 e 4.3.

### 5.3.2 Moto in campo magnetico

Seguiamo più o meno lo stesso procedimento appena visto per risolvere il moto in caso di campo elettrico. Stavolta abbiamo<sup>6</sup>

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \end{cases}$$

Allora siccome l'energia è costante

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} \right] = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{\mathcal{E}} \vec{v} \times \vec{B}$$

Ora sappiamo che

$$\frac{1}{2} \frac{d|v|^2}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{e}{\mathcal{E}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

e questo basta per concludere che il modulo della velocità è costante, il che ci torna con il fatto che il campo magnetico non fa lavoro. A questo punto scriviamo le componenti dell'equazione differenziale, scegliendo un sistema di riferimento tale che il campo magnetico sia parallelo all'asse  $z$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{eB}{\mathcal{E}} v_y \\ \dot{v}_y = -\frac{eB}{\mathcal{E}} v_x \\ \dot{v}_z = 0 \Rightarrow z(t) = v_{0z}t + z_0 \end{cases}$$

Dunque la proiezione del moto sull'asse  $z$  è rettilineo uniforme. Per risolvere la coppia di equazioni utilizziamo il "trucco" di scrivere  $v_{\perp} = v_x + iv_y$ . Allora le due equazioni possono essere scritte

$$\dot{v}_{\perp} = -i \frac{eB}{\mathcal{E}} v_{\perp}$$

scrivendo

$$\omega = \frac{eB}{\mathcal{E}} \quad (5.14)$$

l'equazione differenziale ha soluzione

$$v_{\perp}(t) = v_{\perp}(0)e^{-i\omega t}$$

con la costante  $v_{\perp}(0) = |v_{\perp}(0)|e^{-i\alpha}$  data da

$$v_{0\perp} |v_{\perp}(0)| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \quad \alpha = -\arctan \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

Prendendo ora la parte reale e immaginaria

$$v_x(t) = \Re v_{\perp} = v_{0\perp} \cos(\omega t + \alpha)$$

---

<sup>6</sup>Sempre ponendo  $c = 1$ .

$$v_y(t) = \Im v_{\perp} = -v_{0\perp} \sin(\omega t + \alpha)$$

Da cui, integrando da  $t = 0$  a un istante generico troviamo le leggi orarie

$$x - x_0 = \frac{v_{0\perp}}{\omega} (\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha) \quad (5.15)$$

$$y - y_0 = \frac{v_{0\perp}}{\omega} (\cos(\omega t + \alpha) - \cos \alpha) \quad (5.16)$$

Se ora definiamo le due costanti

$$c_x = x_0 - \frac{v_{0\perp}}{\omega} \sin \alpha \quad c_y = y_0 - \frac{v_{0\perp}}{\omega} \cos \alpha$$

ricaviamo subito

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = \left(\frac{v_{0\perp}}{\omega}\right)^2 \quad (5.17)$$

Dunque la proiezione del moto sul piano  $(x, y)$  è una circonferenza, di centro  $C = (c_x, c_y)$  e di raggio

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{v_{0\perp} \mathcal{E}}{eB} = \frac{p_{0\perp}}{eB} \quad (5.18)$$

In totale dunque la particella si muove seguendo un elica. Sembrerebbe che non vi siano differenze con il caso classico, in realtà (esplicitando ora le potenze di  $c$ )

$$\omega = \frac{cBe}{\mathcal{E}} = \frac{eB}{mc} \sqrt{1 - \frac{v_{0\perp}^2}{c^2}} = \frac{eB_{mks}}{m\gamma} = \frac{\omega_{non-rel}}{\gamma}$$

quindi in realtà la frequenza di ciclotrone è corretta di un fattore  $1/\gamma$ .

## 5.4 La carica elettrica

Definiamo ora la carica elettrica, mediante la quadricorrente

$$Q(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{j^0}{c}(x^0, x^i) \quad (5.19)$$

Inoltre, direttamente dalle equazioni di Maxwell non omogenee, si può ricavare l'equazione di continuità

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial_{\{\nu} \partial_{\mu\}} F^{[\mu\nu]} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu$$

dunque siccome la contrazione di un tensore simmetrico con uno antisimmetrico è nulla

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \quad (5.20)$$

che corrisponde a quella che conosciamo già. Infatti scrivendo separatamente la componente temporale e spaziale

$$\partial_0 j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Ora, affinché la carica sia ben definita è necessario che essa si conservi in tutto lo spazio e chiaramente sia uno scalare, ossia che la definizione non dipenda dal sistema di riferimento scelto.

Mostriamo che si conserva. Dobbiamo dimostrare che la derivata della carica rispetto al tempo è nulla, il che equivale a dire che al passare del tempo la carica nello spazio è la stessa. Consideriamo un volume  $V$

$$\frac{dQ_V}{dt} = \int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial x^0}(x^0, x^i) = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \int_{\partial V} d\Sigma j(x^0, x^i)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema di Gauss. Ora se il volume  $V$  tende a tutto lo spazio, la carica  $Q_V$  tenderà a tutta la carica presente nello spazio e la superficie  $\partial V$  tende a una superficie  $\Sigma$  che contorna tutto lo spazio. Ma sulla superficie all'infinito, supponendo che non vi siano cariche all'infinito, non ci può essere flusso di densità di corrente. Allora

$$\frac{dQ}{dt} = - \lim_{V \rightarrow \mathbb{R}^3} \int_{\partial V} d\Sigma j(x^0, x^i) = 0$$

dunque la carica si conserva.

Mostriamo ora che la definizione è indipendente dal sistema di riferimento, poiché non è per niente ovvio che lo sia. Nel corso di metodi matematici abbiamo già visto degli strumenti che sono necessari alla dimostrazione: la funzione  $\Theta$  di Heavyside, la cui derivata è la delta di Dirac e le proprietà di quest'ultima. Riscriviamo allora la definizione in modo tale che cominci ad assomigliare a uno scalare

$$\begin{aligned} Q(x^0) &= Q(0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0(0, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x j^0(x^0, \vec{x}) \delta(x^0) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x j^0(x^0, \vec{x}) \frac{\partial \Theta}{\partial x^0}(x^0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x j^\mu(x) \frac{\partial \Theta}{\partial x^\mu}(x^0) \end{aligned}$$

l'ultimo passaggio si giustifica pensando al fatto che la funzione di Heavyside dipende soltanto da  $x^0$ , dunque le derivate rispetto alle coordinate spaziali sono nulle. Notiamo ora che abbiamo il "prodotto" in un tensore controvariante con uno covariante: sembra dunque che siamo sulla giusta strada. Pensiamo ora di essere in un altro sistema di riferimento e calcoliamo la carica con la definizione appena riscritta. Ricordo che le coordinate di  $\mathcal{S}'$  sono legate a quelle di  $\mathcal{S}$  mediante una trasformazione di Poincaré (3.5). Allora

$$\begin{aligned} Q' &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' j'^\mu(x) \frac{\partial \Theta}{\partial x'^\mu}(x'^0) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4x}{|\det \Lambda|} \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu \Lambda_\mu{}^\rho \partial_\rho \Theta(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0) \\ &\stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x j^\nu \partial_\nu \Theta(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0) \end{aligned}$$

ove nel passaggio  $*$  si è utilizzato il fatto che  $\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \mathbb{I}_\nu{}^\rho$ . Ora dentro l'integrale, dentro il segno di derivata, aggiungiamo e togliamo  $\Theta(x^0)$

$$Q' = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x j^\nu \partial_\nu [\Theta(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0) - \Theta(x^0)] + Q$$

Ora integriamo per parti: ci sarà un'integrale in cui compare  $\partial_\nu j^\nu$  che sappiamo essere nullo. dunque rimane

$$- \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \partial_\nu [j^\nu (\Theta(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0) - \Theta(x^0))]$$

Ora se questo integrale fosse nullo, potremmo concludere che  $Q' = Q$ . Notiamo però che siamo in una situazione simile al teorema di Gauss in tre dimensioni, in cui avremmo una divergenza integrata su un volume. Se ora pensiamo lo spazio  $\mathbb{R}^4$  come racchiuso da un "cilindro quadridimensionale", con il centro sull'origine degli assi e le basi disposte perpendicolarmente all'asse  $x^0$ . Chiamiamo  $S_L$  la "superficie laterale",  $S^+$  la base all'infinito positivo dei tempi e  $S^-$  la base all'infinito negativo dei tempi. Allora utilizzando la generalizzazione del teorema di Gauss

$$-\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \partial_\nu [j^\nu (\Theta(\Lambda^0_\sigma x^\sigma + a^0) - \Theta(x^0))] = -\int_{S_L} \int_{S^+} \int_{S^-} d\Sigma_\nu j^\nu (\Theta(\Lambda^0_\sigma x^\sigma + a^0) - \Theta(x^0))$$

Consideriamo allora l'integrale su  $S_L$ : l'elemento  $d\Sigma_\nu$  va all'infinito come una lunghezza al cubo, poiché è il bordo di un oggetto quadridimensionale. La differenza tra le funzioni di Heavyside è limitata, al massimo vale 1. Dunque se la quadricorrente va a zero più velocemente dell'elemento  $d\Sigma_\nu$  allora l'integrale su  $S_L$  è nullo. Invece sulle basi abbiamo che  $x^0 \rightarrow \pm\infty$ . Allora nella trasformazione di Poincaré  $\Lambda^0_\sigma x^\sigma + a^0$  conterà soltanto la coordinata temporale, dunque

$$\Theta(\Lambda^0_\sigma x^\sigma + a^0) - \Theta(x^0) \rightarrow 0$$

e l'integrale è nullo anche sulle basi. Allora se la quadricorrente va a zero più velocemente di  $|x|^3$  allora la carica è uno scalare.

## 5.5 Teoria delle distribuzioni

Dalle equazioni di Maxwell si può ricavare l'equazione delle onde per il campo elettrico e magnetico. Consideriamo di essere nel vuoto, dunque  $j^\nu = 0$ . Allora

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \partial^\rho \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu \partial^\rho A^\nu - \partial_\mu \partial^\rho \partial^\nu A^\mu = 0$$

a questo punto aggiungiamo e togliamo  $\partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu A^\rho$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \partial^\mu \partial^\rho A^\nu - \partial_\mu \partial^\rho \partial^\nu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu A^\rho - \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu A^\rho \\ &= \partial_\mu \partial^\mu [\partial^\rho A^\nu - \partial^\nu A^\rho] + \partial_\mu \partial^\nu [\partial^\mu A^\rho - \partial^\rho A^\mu] \\ &= \partial_\mu \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu \partial_\mu F^{\mu\rho} = \partial_\mu \partial^\mu F^{\rho\nu} \end{aligned}$$

perché il secondo membro è l'equazione di Maxwell iniziale. L'equazione delle onde in forma covariante è dunque

$$\partial_\mu \partial^\mu F^{\rho\nu} = 0 \tag{5.21}$$

e si vede che corrisponde a quella già conosciuta.  $\partial^\mu \partial_\nu$  è l'operatore D'Alambertiano, mentre dentro  $F^{\mu\nu}$  sono contenute le componenti del campo elettrico e magnetico.

Sappiamo, ad esempio per il campo elettrico, che la soluzione data dall'equazione delle onde è una funzione del tipo

$$E(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$



che, essendo la soluzione di una equazione differenziale ci si aspetterebbe, da matematici, che sia almeno differenziabile. Ma sperimentalmente si trova che il campo elettrico può essere anche un'onda quadra, tutt'altro che differenziabile.

Il problema si risolve pensando che le equazioni di Maxwell abbiano significato nell'ambito delle **distribuzioni**. In questo modo l'onda quadra è derivabile nel senso delle distribuzioni e ha senso che sia soluzione dell'equazione differenziale.

Un altro problema che porta a pensare che la teoria delle distribuzioni sia la descrizione corretta è quello delle cariche puntiformi. Vediamo cosa porta questa supposizione: supponiamo di avere una carica  $q$  posta nell'origine e di volerla misurare con il teorema di Gauss. Il campo elettrico è

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = q \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Ora integriamo la divergenza del campo su una sfera  $V$  con un certo raggio.

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\Sigma$$

ora, il versore della superficie sarà un versore radiale puntato verso l'esterno e l'elemento di superficie sarà  $|\vec{x}|^2 d\Omega$ , con  $d\Omega$  l'elemento di angolo solido.

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = q \int_{\partial V} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} |\vec{x}|^2 d\Omega = q4\pi$$

Ora ricordandoci che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$

$$\int_V d^3x \rho(\vec{x}) = q$$

e dunque abbiamo trovato come misurare la carica. Potevamo però procedere alternativamente: siccome conosciamo l'espressione del campo elettrico, allora possiamo calcolare direttamente la divergenza e calcolare l'integrale di volume

$$q \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = q \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ora ci ricordiamo che la divergenza in coordinate cartesiane è pari a  $\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$

$$\begin{aligned} \partial_x \left[ q \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ \partial_y \left[ q \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ \partial_z \left[ q \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \end{aligned}$$

sommando dunque

$$\vec{\nabla} \cdot q \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{3|\vec{x}|^3 - 3|\vec{x}||\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^6} = 0 \text{ se } x \neq 0$$

ma dell'escludere l'origine non ci preoccupiamo poiché è un'insieme di misura nulla, dunque non contribuisce all'integrale. Allora abbiamo scoperto che

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot q \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = 0$$

Abbiamo apparentemente raggiunto un assurdo: un procedimento ci conduce a un risultato nullo differentemente dal secondo metodo. Il problema sta nel considerare  $E(\vec{x})$  e  $\rho(\vec{x})$  delle funzioni ordinarie: in particolare la densità di carica non ha nulla a che vedere con una funzione ordinaria visto che nel caso trattato sarebbe nulla ovunque tranne che nell'origine ma ha integrale non nullo.

Per delle cariche puntiformi l'equazione  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$  ha senso soltanto nell'ambito delle distribuzioni: nel caso della carica piazzata nell'origine

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

verifichiamo ora che effettivamente sia

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi q \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \delta^{(3)}(\vec{x})$$

dove a secondo membro la scrittura è simbolica poiché non ha senso in ambito di funzioni. Verificarla in ambito distribuzionale vuol dire che  $\forall \varphi(\vec{x}) \in S(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \varphi(\vec{x}) = 4\pi q \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varphi(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x}) = 4\pi q \varphi(0)$$

Il campo elettrico che abbiamo visto prima però non è una distribuzione. Introduciamo allora la distribuzione con il valore principale<sup>7</sup>

$$E(\vec{x}) = qP\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)$$

Allora per come è definito il valore principale e la regola della derivata distribuzionale

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \varphi(\vec{x}) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q \int_{|\vec{x}| > \epsilon} d^3x \frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \partial_i \varphi(\vec{x})$$

ora non abbiamo problemi nell'intervallo di integrazione: integriamo per parti

$$= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q \int_{|\vec{x}| > \epsilon} d^3x \partial_i \left[ \frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \varphi(\vec{x}) \right] + q \int_{|\vec{x}| > \epsilon} d^3x \partial_i \left( \frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \right) \varphi(\vec{x})$$

Abbiamo già visto che fuori dall'origine la divergenza del fattore a secondo addendo è nulla. Dunque il secondo integrale è nullo. Al primo addendo possiamo ora utilizzare Gauss poiché l'integrale è ben definito, rispetto a prima. Il volume scelto ha due "facce": una superficie sferica di raggio  $\epsilon$  centrata nell'origine e una di raggio infinito ancora centrata nell'origine. La prima ha il versore normale in direzione radiale verso l'origine,

<sup>7</sup>Questa è una mia ipotesi, poiché sono convinto che la funzione vista prima non sia una distribuzione, ma va bene con il valore principale visto in metodi.

poiché deve essere uscente. La seconda invece ha il versore nella stessa direzione ma rivolto verso l'esterno, dunque direzione positiva. Allora

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q \int_{S_\epsilon} d\Sigma \frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \varphi(\vec{x}) - q \int_{S_\infty} d\Sigma \frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \varphi(\vec{x})$$

Essendo  $\varphi$  una funzione di prova, va più velocemente a zero rispetto a qualsiasi potenza. Allora il secondo addendo ha integrale nullo. Consideriamo ora che sulla superficie  $S_\epsilon$   $|\vec{x}| = \epsilon$ . Allora in coordinate sferiche

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q \int_{S_\epsilon} d\Omega \epsilon^2 \hat{n} \frac{\epsilon \hat{n}}{\epsilon^3} \psi(\epsilon, \Omega) = q 4\pi \psi(0)$$

dunque abbiamo verificato formalmente l'uguaglianza distribuzionale.

Qualcuno potrebbe domandarsi poiché finora si è parlato solamente di corpi puntiformi. Questo perché a differenza della fisica newtoniana, in relatività il corpo rigido non ha senso. Immaginiamo di imprimere una forza al corpo rigido relativistico: i punti vicino al luogo dell'impatto cominciano a muoversi, ma siccome l'informazione non può viaggiare più velocemente della luce, i punti lontani non si muovono ancora. Questo facilmente porta a dire che la distanza tra i punti del corpo è variata, dunque non è un corpo rigido. Ovviamente in prima approssimazione il corpo è rigido perché  $c$  è alta. Però in fisica relativistica si considera l'elasticità dei corpi per la trattazione dei corpi estesi.

## 5.6 La quadricorrente

Ci preoccupiamo ora di dimostrare rigorosamente se la quadricorrente è effettivamente un campo quadrivettoriale. Ricordo la sua definizione

$$j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x))$$

Consideriamo ora il caso di una particella di carica  $e$  che si muove. Siano  $z^\mu$  le coordinate spazio-temporali sulla linea di universo  $\gamma$  della particella a cui associamo la quadricorrente, in un sistema di riferimento con coordinate  $x^\mu$ . La densità di carica dovrà essere nulla ovunque tranne che in  $\vec{z}$ , ove si trova la particella. Allora

$$\rho(x^0, \vec{x}) = e \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}(x^0))$$

Ricordiamo che in Fisica 2 avevamo visto che la densità di corrente  $\vec{j}$  nel caso di una sola carica era  $e\vec{v}$ , ma solo nel punto in cui si trova la particella. Allora

$$\vec{j} = ec \frac{d\vec{z}}{dx^0} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}(x^0)) = c \frac{d\vec{z}}{dx^0} \rho(x)$$

Preliminarmente, mostriamo che

$$j^\mu(x) = ce \int_\gamma dz^\mu \delta^{(4)}(x-z) = ce \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x-z(s)) = ce \int_{-\infty}^{+\infty} dz^0 \frac{dz^\mu}{dz^0} \delta^{(4)}(x-z(z^0)) \quad (5.22)$$

ove gli ultimi due integrali non sono altro che una alternativa parametrizzazione del primo.

$$\begin{aligned} j^0(x) &= ce \int_{-\infty}^{+\infty} dz^0 \frac{dz^0}{dz^0} \delta^{(4)}(x - z(z^0)) = ce \int_{-\infty}^{+\infty} dz^0 \delta^{(4)}(x - z(z^0)) \\ &= ce \int_{-\infty}^{+\infty} dz^0 \delta(x^0 - z^0) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}(z^0)) = ce \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}(x^0)) = c\rho(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j^i(x) &= ce \int_{-\infty}^{+\infty} dz^0 \frac{dz^i}{dz^0} \delta^{(4)}(x - z(z^0)) = ce \int_{-\infty}^{+\infty} dz^0 \frac{dz^i}{dz^0} \delta^{(4)}(x - z(z^0)) \\ &= ce \frac{dz^i}{dx^0} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}(x^0)) = ce \frac{d\vec{z}}{dx^0} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}(x^0)) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che la definizione 5.22 è equivalente a 5.7. Mostriamo ora che  $j^\mu$  è un campo quadrivettoriale, ossia che trasforma come un quadrivettore.

$$\begin{aligned} j'^\mu(x') &= ce \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{dz'^\mu}{ds'} \delta^{(4)}(x' - z'(s)) = ce \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz'^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x' - z'(s)) \\ &= ce \int_{-\infty}^{+\infty} ds \Lambda^\mu_\nu \frac{dz^\nu}{ds} \delta^{(4)}(\Lambda(x - z(s))) = \Lambda^\mu_\nu ce \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\nu}{ds} \frac{\delta^{(4)}(x - z(s))}{|\det \Lambda|} \\ &= \Lambda^\mu_\nu j^\nu(x) \end{aligned}$$

Mostriamo infine che l'equazione di continuità è valida anche a livello distribuzionale. Per ogni funzione di prova  $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$  deve essere

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varphi(x) \partial_\mu j^\mu = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varphi(x) \partial_\mu j^\mu &= - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x j^\mu \partial_\mu \varphi(x) = -ce \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x - z(s)) \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}(x) \\ &= -ce \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\mu}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial z^\mu}(z(s)) \stackrel{*}{=} -ce \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{\partial \varphi}{\partial s}(z(s)) = -ce \varphi(z(s)) \Big|_{s=-\infty}^{s=+\infty} = 0 \end{aligned}$$

dove il passaggio  $*$  è giustificato dalla regola della derivata della funzione composta. A questo punto, se  $s = \pm\infty$ , vuol dire che siamo all'infinito negativo/positivo dei tempi. Allora siccome la funzione test è nulla se una componente dell'argomento è infinita, l'integrale è nullo.

## 5.7 Effetto doppler relativistico

Scriviamo il quadrimomento in componenti

$$p^\mu = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right) = \left( \hbar \frac{\omega}{c}, \hbar \vec{k} \right) = \hbar k^\mu$$

ove le uguaglianze saranno analizzate più approfonditamente nella parte di fisica quantistica. L'uguaglianza è vera definendo il quadrivettore

$$k^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

Consideriamo ora una radiazione emessa da una sorgente solidale a un sistema  $\mathcal{S}'$ .  $\mathcal{S}'$  si muove con  $\beta$  rispetto a  $\mathcal{S}$  in direzione  $x$ . La radiazione in  $\mathcal{S}$  è rilevata con frequenza  $\omega$  e il vettore d'onda arriva con un angolo  $\theta$  rispetto all'asse  $x$  e giace nel piano  $(x, y)$ . Scriviamo allora il  $k^\mu$ , tenendo conto del fatto che  $|\vec{k}| = \omega/c$

$$k^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0 \right)$$

Per ottenere  $\omega$  in funzione di  $\omega'$  ci interessa come trasforma la componente temporale del quadrivettore

$$k'^0 = \Lambda^0_\nu k^\nu = \gamma \left( \frac{\omega}{c} - \beta \frac{\omega}{c} \cos \theta \right)$$

Allora la formula per l'effetto doppler relativistico

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)} \quad (5.23)$$

Se sviluppiamo in serie di Taylor la funzione  $\sqrt{1 - \beta^2}$  e  $\frac{1}{1 - \beta \cos \theta}$  per  $\beta \rightarrow 0$  otteniamo

$$\omega = \omega' (1 + \beta \cos \theta)$$

che è proprio la formula dell'effetto doppler non relativistico. La differenza sostanziale è che per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  entra in gioco un effetto puramente relativistico. Infatti si ha che  $\omega_{rel} = \omega' \sqrt{1 - \beta^2}$ , mentre  $\omega_{non-rel} = \omega'$ .

# Capitolo 6

## Esercizi

### Esame 18-06-2006

Un fascio di protoni incidendo su un bersaglio produce un fascio di  $\pi^-$  a energia costante  $\mathcal{E}_\pi$ . Dopo aver percorso una lunghezza  $l = 10 \text{ m}$ , il 10% dei  $\pi^-$  è decaduto. Sapendo che  $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$  e il loro tempo di vita medio è  $\tau_\pi = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ , si calcoli  $\mathcal{E}_\pi$ . Si dica inoltre, giustificandolo se i prodotti del decadimento

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \nu$$

possono essere emessi a  $\theta > \frac{\pi}{2}$  rispetto alla linea di volo dei  $\pi^-$  nel laboratorio, sapendo che  $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$  e assumendo  $m_\nu \sim 0$ .

Bisogna prestare attenzione al fatto che il tempo di vita medio è misurato nel sistema di riferimento solidale al moto dei  $\pi^-$ . Scriviamo la legge del decadimento nel sistema  $\mathcal{S}'$  solidale ai pioni.

$$N(t') = N_0 e^{-\frac{t'}{\tau_\pi}}$$

Il tempo di percorrenza dei pioni nel laboratorio, detta  $\beta_\pi$  la velocità in unità di  $c$  è

$$\bar{t} = \frac{l}{c\beta_\pi}$$

Utilizzando la formula del tempo proprio, si ricava subito il tempo nel sistema  $\mathcal{S}'$

$$\bar{t}' = \frac{l}{c\beta_\pi\gamma_\pi}$$

Ora notando che  $\frac{N(\bar{t}')}{N_0} = 0.9$  possiamo scrivere

$$0.9 = e^{-\frac{l}{c\beta_\pi\gamma_\pi\tau_\pi}} \Rightarrow -\frac{\tau_\pi c}{l} \log 0.9 = \frac{\sqrt{1-\beta_\pi^2}}{\beta_\pi} \Rightarrow \beta_\pi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{c^2\tau_\pi^2 \log^2 0.9}{l^2}}}$$

Inserendo i valori si trova che  $\beta_\pi = 0.997$  in unità di  $c$ , da cui ricaviamo subito l'energia dei  $\pi^-$ , con la formula  $\mathcal{E}_\pi = m_\pi\gamma_\pi = 1.7 \text{ GeV}$ .

Controlliamo se esiste o meno un angolo massimo di emissione dei  $\mu^-$  rispetto alla linea di volo dei  $\pi^-$ . Dobbiamo verificare che  $\beta_\pi = \beta_{CM} > \beta_\mu^*$  affinché possa esistere un  $\theta_{MAX}$ .

$$\beta_\mu^* = \frac{p^*}{\mathcal{E}^*}$$

Ora, utilizzando il fatto che  $m_\nu \sim 0$  semplifichiamo l'espressione di  $p^*$

$$p^* = \frac{1}{2m_\pi} \sqrt{m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2m_\mu^2 m_\pi^2} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = \mathbf{30.6 \text{ MeV}/c}$$

$$\mathcal{E}^* = \sqrt{p_*^2 + m_\mu^2} = \mathbf{109.4 \text{ MeV}}$$

Infine  $\beta_\mu^* = \mathbf{0.28}$ , dunque esiste l'angolo massimo di emissione, che sappiamo essere minore di  $\frac{\pi}{2}$ . Dunque i muoni non possono essere emessi all'indietro.

Per i neutrini la risposta è immediata, poiché avendo massa nulla viaggiano a velocità  $\beta_\nu = 1$  in ogni sdr. Dunque non hanno angolo massimo di emissione e possono essere emessi all'indietro.

### Esame 14-07-2006

*Una particella di carica  $q$  e massa  $m$  si muove percorrendo un'elica in un sistema inerziale  $\mathcal{S}$  in cui è presente un campo elettromagnetico costante e uniforme tale che  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  e  $B > E$ . La proiezione dell'elica lungo la direzione del campo elettrico è lunga  $2R$ , mentre la proiezione del passo dell'elica lungo la direzione del campo magnetico è lunga  $L$ . All'istante iniziale la particella si trova nell'origine con momento  $\vec{p}_0 \parallel \vec{B}$ . Assumendo note  $m, q, L, R, |p_0|$  si calcolino  $|E|$   $|B|$ .*

Innanzitutto è necessario fare delle scelte: definiamo il nostro sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  tale che

$$\vec{E} = (0, |E|, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, |B|)$$

Come si muove la particella in  $\mathcal{S}$ ? Subirà un'accelerazione diretta parallelamente all'asse  $y$  per via del campo elettrico e il campo magnetico le fa compiere un'orbita. In più si muove di moto rettilineo lungo l'asse  $z$  per via del momento iniziale. Dalle informazioni date ( $B^2 - E^2 > 0$ ) deduciamo che esiste  $\mathcal{S}'$  ove il campo elettrico è nullo, e qui percorre dunque un'elica circolare. In definitiva capiamo che in  $\mathcal{S}$  percorre un'elica non cilindrica tale che la sua proiezione è  $2R$  lungo l'asse  $y$  e ha passo  $L$ . La scelta di  $\mathcal{S}$  fa sì che per passare a  $\mathcal{S}'$  è necessario fare un boost lungo l'asse  $x$  con velocità  $\beta = \frac{E}{B}$  e ne consegue che  $2R$  e  $L$  rimangono invariati. Dunque in  $\mathcal{S}'$  sappiamo che percorre un'elica cilindrica di cui sappiamo passo  $L$  e raggio  $R$ .

Con una trasformazione di Lorentz troviamo il campo magnetico in  $\mathcal{S}'$ , che sarà sempre in direzione dell'asse  $z' \parallel z$

$$B' = \gamma (B - \beta E) = \sqrt{B^2 - E^2} = \frac{B}{\gamma}$$

Il momento iniziale, in direzione  $z$ , rimane invariato, mentre in  $\mathcal{S}'$  ci sarà un momento iniziale anche in direzione  $x'$ , che troviamo con una trasformazione di Lorentz

$$p'_{0z} = p_{0z} \quad p'_{0x} = \gamma(-\beta \mathcal{E}_0)$$

dove  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2 + p_{0z}^2}$ . Questo implica che l'energia iniziale in  $\mathcal{S}'$  è

$$\mathcal{E}'_0 = \gamma \mathcal{E}_0$$

In  $\mathcal{S}'$  l'energia e il modulo del momento rimangono costanti, quest'ultimo sia in direzione parallela al campo magnetico che in direzione perpendicolare. Dunque il modulo del momento in direzione perpendicolare è sempre  $p'_{0x'}$ . Possiamo scrivere il raggio dell'orbita in funzione dei dati noti

$$R = \frac{p'_{0x'}}{qB'} = \frac{\gamma^2 \beta \mathcal{E}_0}{qB}$$

Ora conviene trovare il periodo dell'orbita così da trovare il tempo in cui percorre una lunghezza  $L$  in direzione  $z'$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \mathcal{E}'_0}{qB'} = \frac{2\pi \gamma^2 \mathcal{E}_0}{qB}$$

Allora in direzione  $z'$  percorre un moto rettilineo uniforme con punto iniziale  $z' = 0$  e velocità  $\beta_{z'} = \frac{p_{0z}}{\mathcal{E}'_0}$  Allora

$$L = \beta_{z'} T = \frac{p_{0z}}{\mathcal{E}'_0} \frac{2\pi \mathcal{E}'_0}{qB'} = \frac{2\pi \gamma p_{0z}}{qB}$$

Abbiamo dunque due equazioni e due incognite, dunque possiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} R = \frac{\gamma^2 \beta \mathcal{E}_0}{qB} \\ L = \frac{2\pi \gamma p_{0z}}{qB} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{\mathcal{E}_0 L}{2\pi p_{0z}} \gamma \beta$$

Utilizzando ora il fatto che

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$$

$$R = \frac{\mathcal{E}_0 L}{2\pi p_{0z}} \sqrt{\gamma^2 - 1} \Rightarrow \gamma = \sqrt{\left(\frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}\right)^2 + 1}$$

Scrivendo  $\beta$

$$\beta = \frac{\frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}}{\sqrt{\left(\frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}\right)^2 + 1}} \Rightarrow \beta \gamma = \frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}$$

$$B = \frac{\gamma \gamma \beta \mathcal{E}_0}{qR} = \frac{2\pi p_{0z}}{qL} \sqrt{\left(\frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}\right)^2 + 1}$$

Ora dal fatto che  $E = \beta B$

$$E = \frac{\frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}}{\sqrt{\left(\frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}\right)^2 + 1}} \frac{2\pi p_{0z}}{qL} \sqrt{\left(\frac{2\pi R p_{0z}}{\mathcal{E}_0 L}\right)^2 + 1} = \frac{4\pi^2 R p_{0z}^2}{q \mathcal{E}_0 L^2}$$



### Esame 07-09-2006

In un sistema inerziale  $\mathcal{S}$  due fasci di  $\mu^+$  e  $\mu^-$  collidono frontalmente. I  $\mu^+$  hanno velocità nota di modulo  $v^+$ .

1. Quali momenti  $p^-$  devono avere i  $\mu^-$  affinché possa aver luogo la reazione

$$\mu^+ + \mu^- \longrightarrow \tau^+ + \tau^-$$

2. Supponendo noto  $p^-$  qual è la velocità dei  $\tau$  nel centro di massa?

Sono note la massa dei muoni  $m$  e la massa dei tauoni  $M$ , e  $M > m$ . Se diciamo la direzione  $x$  quella in cui avviene l'urto, tale rimarrà anche con un boost nella stessa direzione per passare dal sistema  $\mathcal{S}$  al sistema del centro di massa.

Il centro di massa nel proprio sistema di riferimento rimane chiaramente fermo. Ciò vuol dire che il momento totale del sistema, nel centro di massa, deve essere nullo. Questo ci dice che i muoni hanno momento nel centro di massa uguale e di verso opposto. Da questo ne consegue anche che hanno la stessa energia, in questo sdr. Il quadrimomento totale, prima dell'urto, è dunque

$$P_{TOT}^{\alpha*} = (2\mathcal{E}_+^*, 0, 0, 0)$$

La condizione limite perché la reazione avvenga, è che i  $\tau$  siano prodotti in soglia, ossia siano prodotti fermi nel centro di massa. Allora in questo caso il quadrimomento totale, dopo l'urto, è

$$P_{TOT}^{\alpha*} = (2M, 0, 0, 0)$$

Per la conservazione del quadrimomento ricaviamo subito che  $M = \mathcal{E}_+^*$ . Da qui possiamo ricavare il momento nel centro di massa dei muoni

$$p_{\pm}^* = \pm \sqrt{M^2 - m^2}$$

Utilizzando le trasformazioni di Lorentz, e ricordando la scelta di porre l'asse parallelo al momento dei muoni, possiamo scrivere

$$\mathcal{E}_+ = \gamma(\mathcal{E}_+^* + \beta p_+^*) \quad p_+ = \gamma(p_+^* + \beta \mathcal{E}_+^*)$$

$$\mathcal{E}_- = \gamma(\mathcal{E}_+^* - \beta p_+^*) \quad p_- = \gamma(\beta \mathcal{E}_+^* - p_+^*)$$

Ora, un dato noto è la velocità  $v_+$ , e definiamo la corrispondente in unità di  $c$   $\beta_+$ . Per questo motivo conosciamo anche  $p_+$  e di conseguenza  $\mathcal{E}_+$ . Possiamo inoltre scrivere

$$\beta_+ = \frac{p_+}{\mathcal{E}_+} = \frac{p_+^* + \beta \mathcal{E}_+^*}{\mathcal{E}_+^* + \beta p_+^*} \implies \beta = \frac{-p_+^* + \beta_+ \mathcal{E}_+^*}{\mathcal{E}_+^* - \beta_+ p_+^*} = \frac{\beta_+ M - \sqrt{M^2 - m^2}}{M - \beta_+ \sqrt{M^2 - m^2}}$$

Una volta che conosco  $\beta$  in funzione di dati noti, possiamo ricavare il valore  $p_-$  con una delle trasformazioni di Lorentz scritte di sopra.

Possiamo considerare l'evento come un decadimento, se troviamo la massa equivalente

della situazione prima dell'urto, che non è la semplice somma delle masse. Infatti, dato un decadimento  $M \rightarrow m_1 + m_2$  è vero che

$$P^\mu P_\mu = M^2$$

Scriviamo questa quantità scalare prima dell'urto, così da ricavare la massa equivalente  $M_e$

$$M_e^2 = (P_+^\alpha + P_-^\alpha)^2 = (P_+^\alpha)^2 + (P_-^\alpha)^2 + 2P_+^\alpha P_{-\alpha}^- = 2m^2 + 2\mathcal{E}_+ \mathcal{E}_- - 2p_+ p_- \cos \theta$$

Ma siccome lo scontro è frontale,  $\theta = \pi$ . Dunque

$$M_e = \sqrt{2m^2 + 2\mathcal{E}_+ \mathcal{E}_- + 2p_+ p_-}$$

I dati sono tutti noti poiché conosco sia  $p_+$  che  $p_-$ , che in generale assumiamo sia maggiore uguale a quello trovato precedentemente. A questo punto per trovare la velocità dei tauoni nel centro di massa

$$\beta_\tau^* = \frac{2p_\tau^*}{M_e} = \sqrt{1 - 4 \frac{m_\tau^2}{M_e^2}}$$

### Esame 26-06-2007

*Una particella di carica  $e$  e massa  $m$  è creata in quiete in una regione dello spazio ove sono presenti campo elettrico  $\mathbf{E}$  e campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniformi e costanti con  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 > \mathbf{0}$ . Dopo aver percorso una traiettoria tale che la proiezione lungo la direzione di  $\mathbf{E}$  sia lunga  $L$ , la particella entra in una regione in cui non c'è campo elettrico e quello magnetico è invariato. Qui compie un arco di circonferenza prima di decadere. Assumendo noti  $|\mathbf{E}|, |\mathbf{B}|, m, e, L$  si calcolino*

1. *L'energia  $\mathcal{E}$  nell'istante di transizione tra le due regioni.*
2. *Il raggio  $R$  dell'arco di circonferenza compiuta nella seconda regione.*
3. *L'istante  $\bar{t}$  di transizione tra le due regioni.*

Innanzitutto è necessario fare delle scelte: definiamo il nostro sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  tale che la particella sia a  $t = 0$  nell'origine e

$$\vec{E} = (0, |E|, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, |B|)$$

Per comodità di scrittura  $|E| = E$  e  $|B| = B$  d'ora in poi. La proiezione  $L$  è dunque sull'asse  $y$  e non cambia la sua lunghezza se faccio un boost in direzione  $x$ . Siccome  $B^2 - E^2 < 0$  allora esiste un sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$  tale che  $B' = 0$ . La velocità di  $\mathcal{S}'$  rispetto a  $\mathcal{S}$  è  $\beta = \frac{B}{E}$ . Calcoliamo il modulo del campo  $E'$ , che sarà in direzione  $y' \parallel y$ .

$$E' = \gamma(E - \beta B) = \sqrt{E^2 - B^2} = \frac{E}{\gamma}$$

Prima di lavorare però nel sistema in cui è presente solo campo elettrico, possiamo scrivere la legge di potenza in  $S$ , che non dipende dal campo magnetico

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \langle \vec{v}, \vec{E} \rangle = eE v_y = eE \frac{dy}{dt} \Rightarrow \Delta\mathcal{E} = eE\Delta y$$

Ma sappiamo che  $\Delta y = L$ , e che  $\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E} + \mathcal{E}_0$ . Allora troviamo che  $\mathcal{E} = \mathbf{m} + \mathbf{eEL}$ .

A questo punto possiamo trovare il modulo del momento nell'istante in cui entra nella zona in cui è presente soltanto il campo magnetico

$$|p| = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2} = \sqrt{2meEL + (eEL)^2} = eEL \sqrt{\frac{2m}{eEL} + 1}$$

Il raggio è dunque

$$R = \frac{|p|}{eB} = \frac{EL}{B} \sqrt{\frac{2m}{eEL} + 1}$$

Per ricavare l'istante in cui passa dalla prima alla seconda regione è necessario effettuare un boost con velocità  $\beta$  per andare nel sistema  $S'$ . Trasformiamo le condizioni iniziali: il punto parte ancora dall'origine, ma stavolta ha momento iniziale in direzione  $x$  non nullo

$$p'_{0x'} = -\gamma\beta m$$

Inoltre ha energia iniziale

$$\mathcal{E}'_0 = \gamma\mathcal{E}_0 = \gamma m$$

Dalla legge di forza di Lorentz si ricavano come variano i momenti nelle diverse direzioni

$$p'_{x'} = -\gamma\beta m \quad p'_{y'} = e \frac{E}{\gamma} t' \quad p'_{z'} = 0$$

Scrivendo la legge oraria per le  $y'$  possiamo ricavare  $\bar{t}'$ , imponendo che  $y'(\bar{t}') = L$

$$y'(t') = \frac{1}{eE'} \left( \sqrt{\mathcal{E}_0'^2 + (eE't')^2} - \mathcal{E}_0' \right) \Rightarrow \bar{t}' = L \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2 m}{eEL}}$$

Sostituendo nella legge oraria per le  $x'$ , troviamo l'ascissa in  $S'$  che ci serve per effettuare alla fine una trasformazione di Lorentz verso  $S$  e trovare  $\bar{t}$ .

$$x'(t') = -\frac{\beta m \gamma^2}{eE} \text{settsinh} \left( \frac{eE}{\gamma^2 m} t' \right)$$

Quindi

$$\bar{t} = \gamma \left( \bar{t}' + \beta x'(\bar{t}') \right)$$

### Esame 10-07-2007

Un fascio di particelle  $K^0$  con massa a riposo  $M = 500 \text{ Mev}/c^2$  decade secondo la reazione

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

dove i pioni hanno massa a riposo  $m = 140 \text{ Mev}/c^2$ . La distanza media percorsa nel laboratorio dai  $K^0$  prima di decadere è  $x = 2.4 \text{ cm}$ . Gli angoli tra le direzioni di emissione dei pioni variano tra  $\pi$  e  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Qual è il momento dei  $K^0$ ?
2. Qual è la loro vita media  $\tau$ , nel proprio sistema di riferimento?
3. Qual è l'intervallo dei possibili valori di energia dei  $\pi$ ?

Date le masse  $M$  e  $m$  posso trovare l'energia e il momento dei pioni nel sistema di riferimento del centro di massa. Posso dunque trovare la velocità  $\beta_\pi^*$  che hanno i pioni in questo sistema di riferimento

$$\beta_\pi^* = \frac{p^*}{\mathcal{E}^*} = \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{M^2}} = 0.82$$

Dall'informazione che  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  deduciamo che l'angolo tra le direzioni di emissione dei prodotti ha un minimo, che ha espressione

$$\theta_{min} = \frac{\pi}{2} = 2 \arctan \left( \frac{\beta_\pi^*}{\beta \gamma} \right) = 2 \arctan \left( \frac{M \beta_\pi^*}{p_{K^0}} \right)$$

dove  $\beta$  è la velocità del centro di massa, ossia dei kaoni prima di decadere, e  $\gamma$  il fattore di Lorentz associato a questa velocità. Dunque deduciamo che

$$p_{K^0} = \frac{M \beta_\pi^*}{\tan \left( \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{\tan \left( \frac{\pi}{4} \right)} = 414.2 \text{ MeV}/c$$

Una volta ottenuto il momento possiamo facilmente trovare la velocità dei kaoni

$$v_{K^0} = c\beta = \frac{cp_{K^0}}{\mathcal{E}_{K^0}}$$

con  $p_{K^0}$  misurato in MeV/c. Se  $p_{K^0}$  fosse stato non in unità di  $c$  ci sarebbe stato un'altro fattore  $c$  a moltiplicare la frazione. Il tempo medio percorso nel laboratorio è dunque

$$\bar{t} = \frac{x}{c\beta}$$

Utilizzando la formula del tempo proprio, dobbiamo dividere per  $\gamma$  il tempo nel laboratorio

$$\tau = \frac{x}{c\beta\gamma} = \frac{xM}{cp_{K^0}} = 9.25 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

Per le energie massima e minima dei pioni

$$\mathcal{E}_{MAX} = \gamma (\mathcal{E}^* + \beta p^*) = 495.2 \text{ MeV}$$

$$\mathcal{E}_{MIN} = \gamma (\mathcal{E}^* - \beta p^*) = 152.9 \text{ MeV}$$

con  $\beta = 0.64$ ,  $\mathcal{E}^* = 250 \text{ MeV}$ ,  $p^* = 207.1 \text{ MeV}/c$ .

**Esame 20-06-2013**

Si denotino con  $x, y, z$  gli assi cartesiani di un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . Nella regione  $y > 0$  è presente con campo elettromagnetico costante e uniforme

$$\vec{E} = (0, E, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}E)$$

con  $E > 0$  noto; nella regione  $y < 0$  è presente solo il campo magnetico, invariato. Un elettrone (massa  $m$  e carica  $-e$  è inizialmente fermo nel punto di coordinate  $(0, L, 0)$  con  $L > 0$ ), e sotto l'influenza del campo elettromagnetico a un istante  $\tilde{t}$  attraversa il piano  $y = 0$  con la componente del momento lungo  $y$  che vale  $\tilde{p}$ , compiendo poi un arco di circonferenza di raggio  $R$  nella regione con  $y < 0$ . Si calcolino, in funzione di  $m, e, E, L$

1.  $\tilde{p}$

2.  $R$

3.  $\tilde{t}$

Chiaramente  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  mentre

$$B^2 - E^2 = \left(\frac{8}{9} - 1\right) E^2 < 0$$

Dunque facendo un boost in direzione  $x$  esiste un sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$  tale che  $B' = 0$ , con una velocità  $\beta$

$$\beta = \frac{B}{E} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Noto subito che  $L$  e  $\tilde{p}$  non variano perché perpendicolari alla direzione del boost. Con una trasformazione di Lorentz ricaviamo il modulo del campo elettrico in  $\mathcal{S}'$ , che sarà anch'esso parallelo all'asse  $y' \parallel y$

$$E' = \gamma(E - \beta B) = \frac{E}{3}$$

La particella era inizialmente ferma in  $\mathcal{S}$  in  $(0, L, 0)$ . Scegliamo  $\mathcal{S}'$  tale che a  $t = t' = 0$  gli origini coincidano: allora la particella parte ancora dal punto  $(0, L, 0)$  ma con un momento iniziale in direzione  $x$

$$p'_{0x'} = -\beta\gamma m = -2\sqrt{2}m \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}'_0 = 3m$$

Invece il momento e l'energia al variare del tempo  $t'$

$$\vec{p}'(t') = (-2\sqrt{2}m, -e\frac{E}{3}t', 0) \quad \mathcal{E}'(t') = \sqrt{\mathcal{E}'_0{}^2 + \left(e\frac{E}{3}t'\right)^2}$$

Le leggi del moto sono le seguenti

$$x'(t') = \frac{p'_{0x'}}{-eE'} \operatorname{settsinh} \left( -\frac{eEt'}{\mathcal{E}'_0} \right) = \frac{6\sqrt{2}m}{eE} \operatorname{settsinh} \left( -\frac{eEt'}{9m} \right)$$

$$y'(t') = L - \frac{1}{eE'} \left( \sqrt{\mathcal{E}_0'^2 + (eEt')^2} - \mathcal{E}_0' \right) = L - \frac{3}{eE} \left( \sqrt{9m^2 + \left( e\frac{E}{3}t' \right)^2} - 3m \right)$$

Dalla legge oraria di  $y'$  ricaviamo  $\tilde{t}'$

$$0 = L - \frac{3}{eE} \left( \sqrt{9m^2 + \left( e\frac{E}{3}\tilde{t}' \right)^2} - 3m \right) \Rightarrow \tilde{t}' = \sqrt{L^2 + \frac{18mL}{eE}}$$

Aggiustando le potenze di  $c$

$$\tilde{t}' = \frac{1}{c} \sqrt{L^2 + \frac{18mL}{eE}} c^2$$

Allora calcolando il momento  $p'_y$ , nel momento in cui passa per  $y' = 0$ , troviamo anche  $p_y$  nel momento in cui passa per  $y = 0$  perché il boost è lungo  $x$

$$p_y = \tilde{p} = -e\frac{E}{3c} \sqrt{L^2 + \frac{18mL}{eE}} c^2 = -\frac{eEL}{3c} \sqrt{1 + \frac{18m}{eEL}} c^2$$

Per trovare il raggio dell'orbita è necessario avere tutto il momento in direzione perpendicolare al campo magnetico, ossia in  $(x, y)$ .  $p_y$  è quello appena trovato, invece per  $p_x$  al momento del passaggio in  $y = 0$  è sufficiente una trasformazione di Lorentz

$$p_x = \gamma(p'_{x'}(\tilde{t}') + \beta\mathcal{E}'(\tilde{t}')) = 3(-2\sqrt{2}m + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{9m^2 + \tilde{p}^2}) = 2\sqrt{2}m \left( \sqrt{1 + \frac{\tilde{p}^2}{9m^2}} - 3 \right)$$

Ora il raggio dell'orbita è

$$R = \frac{cp}{eB'} = \frac{3c\sqrt{p_x^2 + \tilde{p}^2}}{2\sqrt{2}eE}$$

Per il tempo  $\tilde{t}$  è sufficiente una trasformazione di Lorentz

$$\tilde{t} = \gamma(\tilde{t}' + \beta x'(\tilde{t}'))$$

dove si ricava  $x'(\tilde{t}')$  dalla legge oraria.

### Esame 05-09-2013

*Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella  $f^0$  di massa  $m_f = 1 \text{ GeV}/c^2$  decade in volo secondo la reazione*

$$f^0 \longrightarrow \pi^0 + \pi^0$$

*e l'energia nel laboratorio di uno dei due pioni è 9 volte quella dell'altro. I pioni hanno massa  $m = 0.15 \text{ GeV}/c^2$ . Entrambi i pioni interagiscono con particelle  $\eta$  di massa  $M = 0.5 \text{ GeV}/c^2$  ferme nel laboratorio, producendo la reazione*

$$\pi^0 + \eta^0 \longrightarrow K^0 + \bar{K}^0$$

*con  $m_K = 0.5 \text{ GeV}/c^2$ , e per uno dei due pioni la reazione avviene in soglia. Si determinino*

1. la velocità di  $f_0$  nel laboratorio.
2. l'angolo di emissione dei due pioni rispetto alla linea di volo di  $f_0$  nel laboratorio.
3. Si dica se nella seconda reazione tra i  $K$  è ammesso angolo massimo o minimo e se ne determini il valore.

La seconda reazione che avviene in soglia è con il  $\pi$  a energia minore, poiché se fosse l'altra allora non potrebbe avvenire per il  $\pi$  a energia minore. Consideriamo dunque la seconda reazione con il  $\pi$  a energia  $\mathcal{E}_\pi$ . Lo scalare  $P^\mu P_\mu$  è invariante e il quadrimomento si conserva. Allora possiamo calcolarlo prima dell'urto tra  $\pi$  e  $\eta$  nel laboratorio e dopo l'urto nel sistema del centro di massa.

$$(P_\pi^\mu + P_\eta^\mu)^2 = (P_K^{\mu*} + P_{\bar{K}}^{\mu*})^2$$

Abbiamo però scelto la reazione che avviene in soglia, dunque i  $K$  sono fermi nel centro di massa

$$(P_\pi^\mu + P_\eta^\mu)^2 = P_\pi^2 + P_\eta^2 + 2P_\pi^\mu P_{\eta\mu} = m^2 + M^2 + 2\mathcal{E}_\pi \mathcal{E}_\eta - 2\langle \vec{p}_\pi, \vec{p}_\eta \rangle = m^2 + M^2 + 2\mathcal{E}_\pi M$$

$$(P_K^{\mu*} + P_{\bar{K}}^{\mu*})^2 = m_K^2 + m_K^2 + 2m_K^2 = 4m_K^2$$

Quindi possiamo esplicitare l'energia del  $\pi$

$$\mathcal{E}_\pi = \frac{4m_K^2 - m^2 - M^2}{2M} = 0.7275 \text{ GeV}$$

Dalla conservazione dell'energia nella prima reazione

$$\mathcal{E}_f = 10\mathcal{E}_\pi = 7.275 \text{ GeV} \quad \Rightarrow \quad \beta_f = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_f^2 - m_f^2}}{\mathcal{E}_f} = 0.99$$

Siccome conosciamo le masse nella prima reazione, allora troviamo facilmente  $p_\pi^*$  e  $\mathcal{E}_\pi^*$ , e di conseguenza la velocità dei  $\pi$  nel centro di massa

$$p_\pi^* = \sqrt{\frac{m_f^2}{4} - m_\pi^2} = 0.48 \text{ GeV}/c \quad \mathcal{E}_\pi^* = \frac{m_f}{2} = 0.5 \text{ GeV} \quad \Rightarrow \quad \beta_\pi^* = 0.95$$

Effettuando una trasformazione di Lorentz dal centro di massa al laboratorio

$$\mathcal{E}_\pi = \gamma_f (\mathcal{E}_\pi^* + \beta_f p_\pi^* \cos \theta_*)$$

$$9\mathcal{E}_\pi = \gamma_f (\mathcal{E}_\pi^* - \beta_f p_\pi^* \cos \theta_*)$$

Dove il segno meno di differenza è dato dal fatto che nel centro di massa i due prodotti vengono emessi a  $\theta^*$  e  $\theta^* - \pi$ . Sottraendo le due equazioni si elimina il termine  $\mathcal{E}_\pi^*$  e si può esplicitare il coseno

$$\cos \theta_* = \frac{4\mathcal{E}_\pi^*}{\gamma_f \beta_f p_\pi^*} = 0.5937 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_* = 0.8046$$

Utilizzando dunque la formule

$$\theta_{\pi^+} = \arctan \left( \frac{\sin \theta_\star}{\gamma_f \left( \cos \theta_\star + \frac{\beta_f}{\beta_\star} \right)} \right) = 4^\circ$$

$$\theta_{\pi^-} = \arctan \left( \frac{\sin \theta_\star}{\gamma_f \left( \cos \theta_\star - \frac{\beta_f}{\beta_\star} \right)} \right) = -14^\circ$$

Per i kaoni prodotti in soglia, ossia fermi nel centro di massa, si vede che essendo  $\beta_{\star K} = 0$ , viene fuori  $\theta = 0$  dalla formula con l'arcotangente utilizzata di sopra. É inoltre naturale che venga così, poiché se sono fermi nel centro di massa nel laboratorio devono viaggiare paralleli alla velocità del centro di massa. La domanda ha senso porla invece per la reazione che non avviene in soglia. Calcoliamo la massa equivalente per considerare l'urto come un decadimento, ricordando che la particella  $\eta$  è ferma nel laboratorio

$$M_e^2 = P_{TOT}^\mu P_{\mu TOT} = (P_\pi^\mu + P_\eta^\mu)^2 = m^2 + M^2 + 2(9\mathcal{E}_\pi)M \Rightarrow M_e = 2.61 \text{ GeV}/c^2$$

$$\beta_{CM} = \frac{|p|_{TOT}}{\mathcal{E}_{TOT}} = \frac{\sqrt{81\mathcal{E}_\pi^2 - m^2}}{9\mathcal{E}_\pi + M} = 0.9288 \Rightarrow \gamma_{CM} = 2.70$$

La velocità nel centro di massa dei kaoni è dunque

$$\beta_K^\star = \frac{p^\star}{\mathcal{E}^\star} = \sqrt{1 - 4 \frac{m_K^2}{M_e^2}} = 0.9237 \Rightarrow \gamma_K^\star = 2.61$$

Siamo quindi nel caso  $\beta_\star^K < \beta_{CM} < \beta_K^\star \gamma_K^\star$ , e sappiamo che esiste angolo massimo con la seguente formula

$$\theta_{MAX} = \arctan \left( \frac{1}{\gamma_{CM}} \frac{1}{\sqrt{\beta_{CM}^2 - \beta_{K^\star}^2}} \right) = 75^\circ$$

### Esame 08-09-2014

Un flusso di particelle  $f^0$  di massa  $M = 1.2 \text{ GeV}/c^2$  e di energia  $\mathcal{E}$ , dopo aver percorso una distanza media  $d = 10^{-10} \text{ m}$  decade nel laboratorio tramite la reazione

$$f^0 \longrightarrow K^0 + \bar{K}^0$$

con massa delle particelle  $K$  pari a  $m = 0.5 \text{ GeV}/c^2$ . Gli angoli di emissione tra le coppie dei  $K$  variano nel laboratorio tra  $0^\circ$  e  $60^\circ$ . Si calcolino:

1. l'energia  $\mathcal{E}$ ;
2. la vita media delle particelle  $f^0$ ;
3. i valori minimo e massimo del modulo del momento dei  $K$  nel laboratorio.



L'informazione che l'angolo tra i kaoni varia tra  $0^\circ$  e  $60^\circ$  ci dà una relazione tra velocità delle particelle  $K$  nel centro di massa,  $\beta_*$  e velocità del centro di massa, ossia della particella  $f$ ,  $\beta$  con relativa  $\gamma$ . Ci sono due casi in cui si ha un angolo massimo:  $\gamma_*\beta_* > \beta > \beta_*$  e  $\beta > \beta_*\gamma_* > \beta_*$ . Nel primo si hanno due massimi e un minimo per l'angolo tra i due prodotti, nel secondo semplicemente un massimo. Siccome il testo non mi pare che dia ulteriori informazioni per evitare questa indecisione, scelgo la seconda ipotesi.

$$\frac{\pi}{3} = 2 \arctan \left( \frac{\beta_*}{\beta\gamma} \right)$$

Date le masse, conosciamo tutto a meno dell'angolo di emissione, nel centro di massa

$$\beta_* = \frac{p_*}{\mathcal{E}_*} = \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{M^2}} = 0.5528$$

Dunque

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{3\beta_*} + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{M^2 - 4m^2}{M^2 - 3m^2}} = 0.6916$$

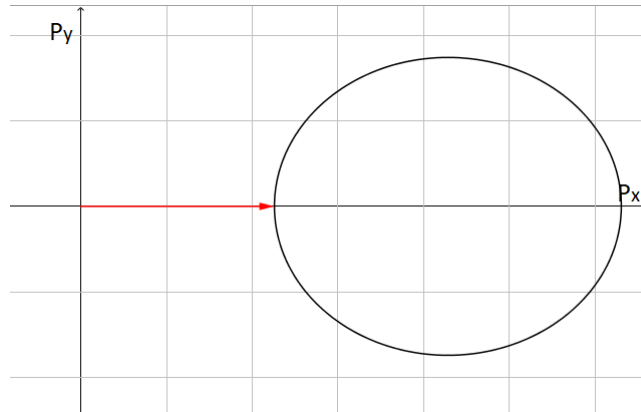
Data la velocità, l'energia è

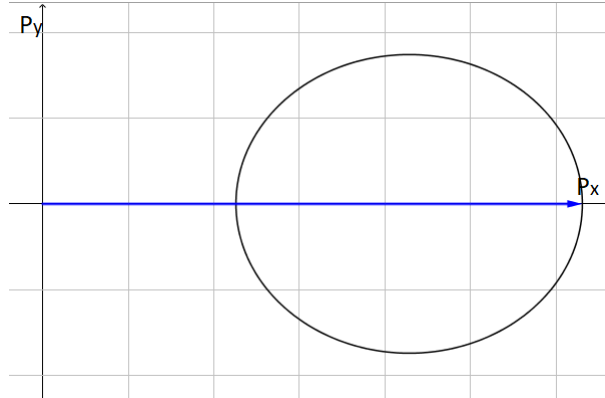
$$\mathcal{E} = \gamma m = 2m \sqrt{1 - 3 \frac{m^2}{M^2}} = 1.66 \text{ GeV}/c^2$$

La vita media delle particelle si intende nel loro sistema di riferimento. Dunque, detto  $\bar{t}$  il tempo medio di vita nel laboratorio, il tempo proprio delle particelle è

$$\tau = \int_0^{\bar{t}} dt \frac{1}{\gamma} = \frac{\bar{t}}{\gamma} = \frac{d}{c\beta\gamma} = 3.5 \cdot 10^{-19} \text{ s}$$

Dal primo punto ricordiamo che sussiste la catena di disuguaglianze  $\beta > \beta_*\gamma_* > \beta_*$ , da cui si deduce che esiste che non sono permessi tutti gli angoli per il momento dei  $K$ , che devono stare su un'ellisse nel piano  $(p_x, p_y)$ . Dunque, considerando le seguenti figure è facile capire quali sono i casi in cui abbiamo modulo del momento minore e massimo





I casi sono quelli in cui il momento è tutto sull'asse  $x$ , che corrisponde ai casi di  $\theta_\star = 0, \pi$ , dunque con una trasformazione di Lorentz

$$p_{MAX} = \gamma(p^\star + \beta \mathcal{E}^\star) = \gamma \left( \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} + \beta \frac{M}{2} \right) = 1.034 \text{ GeV}/c$$

$$p_{MIN} = \gamma(-p^\star + \beta \mathcal{E}^\star) = \gamma \left( -\sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} + \beta \frac{M}{2} \right) = 0.115 \text{ GeV}/c$$

### Esame 08-09-2014

Un  $K^0$  di massa  $m_K = 0.5 \text{ GeV}/c^2$  decade in una regione in cui è presente un campo magnetico  $\vec{B}$  di modulo  $B = 10^8 \text{ V/m}$ , tramite la reazione

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

che avviene in un piano perpendicolare a  $B$  con il  $\pi^-$  di energia doppia del  $\pi^+$  ( $m_\pi = 0.15 \text{ GeV}/c^2$ ). Dopo un tempo  $\bar{t} = 10^{-8} \text{ s}$  il  $\pi^-$  interagisce con un protone fermo nel laboratorio dando luogo in soglia alla reazione

$$\pi^- + p^+ \longrightarrow n^0 + \pi^0 + f^0$$

ove  $m_p = m_n = m_f = 1 \text{ GeV}/c^2$ . Si calcolino

1. la velocità del  $K^0$ ;
2. l'angolo di emissione del  $\pi^-$  rispetto alla linea di volo del  $K^0$ ;
3. la distanza del punto in cui avviene il decadimento e il punto in cui avviene la seconda reazione.

Per comodità di notazione denoto tutto ciò che riguarda il  $\pi^-$  con apici o pedici "-", analogamente per quanto riguarda il  $\pi^+$  con "+". La seconda reazione avviene in soglia, calcolo dunque la massa equivalente  $M_e$  tale da considerarla un decadimento e posso eguagliarla alla somma delle masse dei prodotti

$$M_e^2 = P_{TOT}^\mu P_{\mu \text{ TOT}} = (P_p^\mu + P_-^\mu)^2 = m_p^2 + m_+^2 + 2\mathcal{E}_- m_p$$

$$m_p^2 + m_+^2 + 2\mathcal{E}_- m_p = (m_\pi + m_n + m_f)^2 \Rightarrow \mathcal{E}_- = \frac{(m_\pi + m_n + m_f)^2 - m_p^2 - m_+^2}{2m_p} = 1.8 \text{ GeV}$$

Per la conservazione dell'energia nella prima reazione

$$\mathcal{E}_K = \frac{3}{2}\mathcal{E}_- = 2.7 \text{ GeV} \quad \Rightarrow \quad \beta_K = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_K^2 - m_K^2}}{\mathcal{E}_K} = 0.9827$$

Scegliendo un sistema tale che, nel centro di massa il  $\pi_-$  venga emesso a  $\theta_*$  e il  $\pi_+$  a  $\theta_* - \pi$ , possiamo scrivere

$$\mathcal{E}_- = \gamma_K (\mathcal{E}^* + \beta_K p^* \cos \theta^*)$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_- = \gamma_K (\mathcal{E}^* - \beta_K p^* \cos \theta^*)$$

Sottraendo le due equazioni ed esplicitando il coseno troviamo

$$\cos \theta^* = \frac{\mathcal{E}_-}{4\gamma_K \beta_K p^*} = 0.4240 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta^* = 0.9056$$

La velocità del  $\pi_-$  nel centro di massa è invece

$$\beta_-^* = \frac{p^*}{\mathcal{E}^*} = 0.8$$

Utilizzando quindi la formula

$$\theta_- = \arctan \left( \frac{\sin \theta_*}{\gamma_K \left( \cos \theta_* + \frac{\beta_K}{\beta_*^-} \right)} \right) = 5.8^\circ$$

Il  $\pi_-$  percorre un arco di circonferenza con velocità nota, poiché immerso in campo magnetico ortogonale al piano del moto

$$\beta_- = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_-^2 - m_-^2}}{\mathcal{E}_-} = 0.9965$$

L'arco è lungo dunque  $d = c\beta_- \bar{t}$ . Possiamo allora trovare l'angolo sotteso all'arco

$$\theta_{\bar{t}} = \frac{c\beta_{\bar{t}}}{R}$$

ove il raggio è dato dalla formula

$$R = \frac{p_- c}{eB} = 17.9 \text{ m}$$

La distanza, ossia il segmento che congiunge gli estremi dell'arco è

$$L = 2R \sin(\theta_{\bar{t}}) = 2 \frac{p_- c}{eB} \sin \left( \frac{c\beta_{\bar{t}}}{R} \right)$$

$$p_- = \sqrt{\mathcal{E}_-^2 - m_-^2} = 1.7937 \text{ GeV}/c$$

Per convertire in unità di misura del sistema internazionale devo dividere per  $c$ , e poi tenere conto della relazione  $1 \text{ GeV} = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ .

$$p_- = \frac{1.7937}{3 \cdot 10^8} \times 1.6 \cdot 10^{-10} = 9.57 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Da cui segue  $L = 0.1 \text{ m}$ .

### Esame 19/09/2015

In un sistema  $\mathcal{S}$  tra le espansioni polari di un magnete in quiete è presente un campo magnetico assunto uniforme e costante  $\vec{B} = (0, 0, \sqrt{2} \cdot 10^9 \text{ V/m})$ . Un fascio di protoni ( $M = 1 \text{ GeV}/c^2$ ) di energia  $\mathcal{E}_0 = 5 \text{ GeV}$  entra tra le espansioni del magnete in direzione  $\hat{y}$  e lungo tale direzione la larghezza del magnete è  $L = 1 \text{ m}$ .

1. Si calcoli la velocità in unità di  $c$  che deve avere il magnete in direzione  $\hat{x}$  affinché i protoni, dopo aver attraversato tutto il magnete, escano con energia  $\mathcal{E} = 5.5 \text{ GeV}$ .

All'uscita del magnete i protoni urtano elasticamente con dei  $\pi^+$  ( $M = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ ) in quiete in  $\mathcal{S}$

2. Si calcoli l'angolo massimo dei  $p$  dopo l'urto, rispetto alla loro direzione di volo all'uscita del magnete.
3. In tali condizioni di angolo massimo si determini l'energia dei protoni in  $\mathcal{S}$  dopo l'urto.

Il problema mi pare sia da interpretare nel seguente modo: supponiamo di avere in un sistema un campo elettromagnetico uniforme e costante e tale che  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  e  $B^2 - E^2 = 0$ . Allora sappiamo che esiste un sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$  tale che ci sia solo campo magnetico. Si potrebbe porre il problema esattamente in questa maniera, e semplicemente dire che il campo magnetico in  $\mathcal{S}'$  è generato da un magnete. Allora si vede subito l'analogia del fatto che la velocità del magnete è la velocità del boost da fare un caso generale. Quindi definisco ora il sistema  $\mathcal{S}$  quello in cui è presente il campo elettromagnetico, e ha senso dunque che vari l'energia del fascio di protoni. Definisco invece  $\mathcal{S}'$  il sistema solidale al magnete in movimento. Allora in  $\mathcal{S}'$  sappiamo che  $\vec{B}' = (0, 0, \sqrt{2} \cdot 10^9 \text{ V/m})$ , e inoltre

$$B' = \gamma(B - \beta E') = \frac{E}{\gamma\beta}$$

L'estensione in direzione  $y \parallel y'$  non cambia nei due sistemi di riferimento ed è sempre  $L$ . Allora per la legge di potenza in  $\mathcal{S}$

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = eEL = \gamma\beta eB'L \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\sqrt{\Delta\mathcal{E}^2 + (eB'L)^2}} = \frac{1}{3}$$

L'urto è elastico, dunque la reazione che avviene è

$$p^+ + \pi^+ \longrightarrow p^+ + \pi^+$$

Calcolo la massa equivalente  $M_e$  tale da considerare l'urto come un decadimento e utilizzare le solite formule

$$M_e^2 = (P_{TOT}^\mu P_{\mu TOT}) = M^2 + 2\mathcal{E}m + m^2 \Rightarrow M_e = 1.5999 \text{ GeV}/c^2$$

Dunque il centro di massa si muove alla velocità

$$\beta_c = \frac{|p|}{\mathcal{E} + m} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - M^2}}{\mathcal{E} - m} = 0.9589$$

Calcoliamo l'energia e il momento dei protoni nel centro di massa

$$\mathcal{E}_p^* = \frac{M_e^2 + M^2 - m^2}{2M_e} \quad |p|_p^* = \sqrt{\frac{M_e^4 + M^2 + m^2 - 2M^2m^2 - 2(M^2 + m^2)M_e^2}{4M^2}}$$

Dunque  $p_p^* = 0.4732 \text{ GeV}/c$ , mentre  $\mathcal{E}_p^* = 1.1063 \text{ GeV}$ . Dunque la velocità dei protoni nel centro di massa, dopo l'urto, è

$$\beta_p^* = \frac{\sqrt{M_e^4 + M^4 + m^4 - 2M^2m^2 - 2(M^2 + m^2)M_e^2}}{M_e^2 + M^2 - m^2} = 0.4278$$

Quindi

$$\theta_{MAX} = \arcsin\left(\frac{p_p^*}{M\beta_c\gamma_c}\right) \stackrel{\text{calcoli/Barone}}{=} \arcsin\left(\frac{m}{M}\right) = 8.05^\circ$$

Dalla formula [7.127] del Barone

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p' &= \frac{(\mathcal{E} + m)(M^2 + m\mathcal{E}) + p_p^2 \cos \theta_{MAX} \sqrt{m^2 - M^2 \sin^2 \theta_{MAX}}}{(\mathcal{E} + m)^2 - p_p^2 \cos^2 \theta_{MAX}} \\ &= \frac{(\mathcal{E} + m)(M^2 + m\mathcal{E})}{(\mathcal{E} + m)^2 - (\mathcal{E}^2 - M^2) \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)} = 3.18 \text{ GeV} \end{aligned}$$

### Esame 04/02/2014

Un fascio di  $e^+$  con momento di modulo  $p^+ = 10 \text{ MeV}/c$  nel laboratorio collide frontalmente con un fascio di  $e^-$ .

1. Quali valori del momento  $p_-$  può possedere il fascio di  $e^-$  perché possa dar luogo alla reazione

$$e^+ + e^- \longrightarrow \mu^+ + \mu^-$$

(massa degli  $e$   $m = 0.5 \text{ MeV}/c^2$ , massa dei muoni  $M = 100 \text{ MeV}/c^2$ ).

2. Supponendo che  $p_-$  sia il doppio di quello trovato al punto 1 si determini la velocità dei muoni nel centro di massa.
3. Nelle stesse ipotesi del punto 2 si determini la velocità del centro di massa e l'angolo massimo di emissione dei muoni rispetto alla linea di volo degli  $e$ .

Siccome gli  $e$  collidono frontalmente, ossia con angolo  $\alpha = \pi$ , allo stesso modo avverrà nel centro di massa, poiché facendo un boost lungo quella direzione, giacendo sulla stessa retta, i momenti non cambiano direzione. Dal fatto inoltre che nel centro di massa il momento totale è nullo, capiamo che  $p_-^* = -p_+^*$ , e dunque anche le energie sono uguali per via della stessa massa. I "minimi requisiti" per cui possa avvenire la reazione è che essa avvenga in soglia, ossia che i prodotti siano fermi nel centro di massa. Allora per la conservazione del quadri-momento, totale, prima e dopo l'urto

$$(2\mathcal{E}_e^*, 0, 0, 0) = (2M, 0, 0, 0) \Rightarrow \mathcal{E}_e^* = M \Rightarrow p_+^* = \sqrt{M^2 - m^2}$$

Allora con una trasformazione di Lorentz torniamo nel laboratorio, denotando  $\beta$  con la velocità del centro di massa

$$p^+ = \gamma (p_+^* + \beta \mathcal{E}_e^*) \quad \mathcal{E}^+ = \gamma (\mathcal{E}_e^* + \beta p_+^*)$$

Possiamo da qui ricavare la velocità dei positroni, che era nota

$$\beta_+ = \frac{p_+}{\sqrt{p_+^2 + m^2}} = \frac{p_+^* + \beta \mathcal{E}_e^*}{\mathcal{E}_e^* + \beta p_+^*} \Rightarrow \beta = \frac{p_+^* - \beta_+ \mathcal{E}_e^*}{-\mathcal{E}_e^* + \beta_+ p_+^*}$$

Dunque

$$\beta = \frac{\sqrt{M^2 - m^2} - M \frac{p_+}{\sqrt{p_+^2 + m^2}}}{\frac{p_+}{\sqrt{p_+^2 + m^2}} \sqrt{M^2 - m^2} - M} = -0.9810$$

Potrebbe turbare il fatto che sia trovato un segno negativo. In realtà, ciò vuol dire che se scegliamo come verso positivo il verso in cui viaggia il fascio di positroni, allora il centro di massa viaggia nel verso opposto. Questo significa che gli elettroni sono più veloci dei positroni e hanno dunque un modulo del momento più alto. Ciò torna poiché gli elettroni/positroni hanno massa praticamente trascurabile rispetto ai loro prodotti, perciò devono avere alta energia per produrre qualcosa di così più massivo, e notato che anche  $p^+$  non è esagerato, è normale aver l'indicazione che il  $p^-$  dev'essere tanto più alto. Troviamo il  $p_-$

$$p_- = \gamma (-p_+^* + \beta \mathcal{E}_+^*) = \gamma (-\sqrt{M^2 - m^2} + \beta M) = -1021.09 \text{ MeV}/c$$

Come aspettato, il  $p^-$  è decisamente più alto.

Supponiamo d'ora in poi quindi  $p_- = -2042.17 \text{ MeV}/c$ . Calcoliamo la massa equivalente dell'urto al fine da considerarlo un decadimento

$$M_e^2 = (P_+^\mu + P_-^\mu)^2 = 2m^2 + 2\mathcal{E}_+ \mathcal{E}_- - 2p^+ p_- \cos \alpha = 2m^2 + 2\mathcal{E}_+ \mathcal{E}_- + 2p^+ p_-$$

E facendo i conti troviamo  $M_e = 286.00 \text{ MeV}/c^2$ . Allora ora possiamo ricavare la velocità dei muoni nel centro di massa

$$\beta_\mu^* = \frac{p_\mu^*}{\mathcal{E}_\mu^*} = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{M_e^2}} = 0.7148$$

In questo caso la velocità del centro di massa è invece

$$\beta = \frac{p_+ + p_-}{E_+ + E_-} = 0.999994$$

Sicuramente allora esiste l'angolo massimo, che sarà

$$\theta_{MAX} = \arcsin\left(\frac{p^*}{M\beta\gamma}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{M\beta\gamma}\sqrt{\frac{M_e^2}{4} - M^2}\right) = 0.2^\circ$$

### Esame 04/02/2014

Si abbia un fascio di  $\pi^-$  che decade in volo secondo la reazione

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

Si ha che l'angolo massimo dei  $\mu^-$  e la linea di volo dei  $\pi^-$  è  $\bar{\theta} = 1.2^\circ$ . Calcolare

1. L'impulso dei  $\pi^-$  nel laboratorio;
2. L'energia di  $\mu^-$  nel laboratorio corrispondente al suo angolo massimo;
3. La massima energia che può avere  $\mu^-$  nel laboratorio;
4. L'angolo che  $\mu^-$  forma con la linea di volo dei  $\pi^-$  nella condizione 3;
5. Il cammino medio che percorre  $\mu^-$  nella condizione 3 prima di decadere
6. la percentuale di  $\mu^-$  prodotti tra 1300 MeV e 1600 MeV
7. Esiste un angolo massimo per  $\bar{\nu}_\mu$ ? Se si determinarlo.

Si consideri la massa dei  $\pi^-$   $M = 140 \text{ MeV}/c^2$ , la massa dei  $\mu^-$   $m = 105 \text{ MeV}/c^2$  e il tempo di vita medio dei  $\mu^-$   $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

L'angolo massimo ci fornisce una relazione tra  $p_\pi$  e dati noti. Infatti, denotando  $\beta$  la velocità dei  $\pi$ , e quindi del centro di massa

$$\sin \bar{\theta} = \frac{p_\mu^*}{m\beta\gamma} = \frac{Mp_\mu^*}{mp_\pi} \quad \Rightarrow \quad p_\pi = \frac{Mp_\mu^*}{m \sin \bar{\theta}} = \frac{(M^2 - m^2)}{2m \sin \bar{\theta}} = 1949.79 \text{ MeV}$$

Inoltre sappiamo che, all'angolo massimo nel laboratorio, il coseno dell'angolo nel centro di massa è

$$\cos \theta^* = -\frac{\beta_\mu^*}{\beta} = 73.70^\circ$$

Dove

$$\beta = \frac{p_\pi}{\mathcal{E}_\pi} = 0.9974 \quad \beta_\mu^* = \frac{p_\mu^*}{\mathcal{E}_\mu^*} = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} = 0.2800$$

Allora possiamo trovare l'energia nel laboratorio

$$\mathcal{E}_\mu = \gamma (\mathcal{E}_\mu^* + \beta p_\mu^* \cos \theta^*) = \gamma \frac{2Mm^2}{(M^2 + m^2)} = 1398.75 \text{ MeV}$$

L'energia massima che  $\mu$  può avere nel laboratorio è invece

$$\mathcal{E}_\mu = \gamma (\mathcal{E}_\mu^* + \beta p_\mu^*) = \gamma \frac{M^2 + m^2 + \beta(M^2 - m^2)}{2M} = 1941.61 \text{ MeV}$$

In questa situazione l'angolo nel centro di massa è  $\theta^* = 0$  e altro non può essere anche nel laboratorio, dunque  $\theta = 0$ .

Suppongo che il  $\tau$  fornito dal testo sia il tempo di vita media nel sistema proprio dei muoni. Il tempo di vita media nel laboratorio è invece

$$\tau_L = \frac{d}{c\beta_\mu} \Rightarrow \tau = \frac{d}{c\gamma_\mu\beta_\mu} = \frac{dm}{cp_\mu} \Rightarrow d = \frac{\tau cp_\mu}{m} = \tau c \sqrt{\frac{\mathcal{E}_\mu^2}{m^2} - 1} = 12.2 \text{ km}$$

La densità di probabilità di energia è costante, e vale dunque

$$\rho(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\gamma\beta p_\mu^*} = \frac{Mm}{p_\pi(M^2 - m^2)}$$

Allora la probabilità

$$P(1300 \leq \mathcal{E}_\mu \leq 1600) = \frac{Mm(1600 - 1300)}{p_\pi(M^2 - m^2)} = 26.4\%$$

### Esame 15/07/2013

Un fotone  $\gamma$  di energia  $\mathcal{E}_\gamma = 250 \text{ MeV}$  urta una particella neutra  $\phi$ , ferma nel laboratorio e di massa  $m_\phi = 1000 \text{ MeV}/c^2$ , dando luogo alla reazione

$$\gamma + \phi \longrightarrow K + \bar{K}$$

dove i  $K$  sono particelle neutre di massa  $m_K = 500 \text{ MeV}/c^2$ . Il  $K$  nella reazione è prodotto in avanti lungo la direzione di volo del fotone. Prima di decadere il  $K$  entra in una regione in cui è presente un campo magnetico di modulo  $B = 10^9 \text{ V/m}$ . Il  $K$  decade poi con una reazione

$$K \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

in un piano che forma un angolo di  $\frac{\pi}{6}$  con la direzione del  $\vec{B}$ , in condizioni  $\theta_{MIN}$  tra i pioni, che hanno massa  $m_\pi = 150 \text{ MeV}/c^2$ . I due pioni si muovono seguendo delle eliche di raggi rispettivamente  $R_+$  e  $R_-$ .

1. Si calcoli la velocità del  $K$  nel laboratorio;
2. Si calcoli l'angolo minimo  $\theta_{MIN}$ ;
3. Si calcolino  $R_+$  e  $R_-$ .

Il  $K$  è prodotto ad angolo nullo nel laboratorio, di conseguenza lo è anche nel centro di massa. Calcoliamo la velocità del centro di massa

$$\beta_{CM} = \frac{p_{CM}}{\mathcal{E}_{CM}} = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{\mathcal{E}_\gamma + m_\phi} = 0.2000$$



Calcoliamo la massa equivalente dell'urto

$$M_e^2 = (P_\gamma^\mu + P_\phi^\mu)^2 = m_\phi^2 + 2\mathcal{E}_\gamma m_\phi = 1.5 \text{ GeV}^2/c^4$$

Allora

$$\mathcal{E}_K = \gamma_{CM}(\mathcal{E}_K^* + \beta_{CM}p_K^*) = \gamma_{CM} \left( \frac{\sqrt{m_\phi^2 + 2\mathcal{E}_\gamma m_\phi}}{2} + \beta_{CM} \sqrt{\frac{m_\phi^2 + 2\mathcal{E}_\gamma m_\phi}{4} - m_K^2} \right)$$

E la formula porge  $\mathcal{E}_K = 697.17 \text{ MeV}$ . Dunque

$$\beta_K = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_K^2 - m_K^2}}{\mathcal{E}_K} = 0.6969$$

Occorre ora trovare la velocità della  $\pi$  nel centro di massa

$$\beta_\pi^* = \sqrt{1 - 4 \frac{m_\pi^2}{m_K^2}} = 0.8000$$

Siamo nel caso  $\gamma_K \beta_K > \beta_\pi^* > \beta_K$ . Allora l'angolo minimo è

$$\theta_{MIN} = 2 \arctan \left( \frac{\beta_\pi^*}{\beta_K \gamma_K} \right) = 78.9^\circ$$

L'angolo che i prodotti formano con la linea di volo del  $K$  nel centro di massa, corrispondente all'angolo minimo, è pari a  $\frac{\pi}{2}$  e dunque c'è simmetria. Allo stesso modo facendo un boost, le particelle hanno massa uguale, quindi non c'è motivo perché il boost agisca in modo "diverso" rompendo la simmetria. Allora da qui si capisce che le particelle hanno momento ed energia uguali. Per questo motivo allora hanno anche i raggi delle eliche uguali poiché dipendono soltanto dall'intensità del campo e dalla componente del momento perpendicolare ad esso. Dunque

$$R = \frac{cp_\pi \sin \frac{\pi}{6}}{eB} = \frac{cp_\pi}{2eB}$$

$$\mathcal{E}_\pi = \gamma_K \mathcal{E}_\pi^* = \gamma_K \frac{m_K}{2} = 348.59 \text{ MeV} \Rightarrow p_\pi = 314.67 \text{ MeV}/c$$

Se utilizziamo il momento in eV, allora possiamo porre la carica del pione pari a 1, poiché ha la stessa carica del protone. Allora dobbiamo dividere per un  $c$ , poiché il momento è ancora in unità di  $\frac{1}{c}$

$$R = \frac{3 \cdot 10^8 \times 3.1467 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^9 \times 3 \cdot 10^8} = 15.73 \text{ cm}$$

### Esame 19/02/2015

In un sistema inerziale  $\mathcal{S}$  un fascio di  $\mu^-$  di energia  $\mathcal{E}$  si scontra frontalmente con un fascio di  $\mu^+$  di energia  $\frac{\mathcal{E}}{2}$  dando luogo alla reazione

$$\mu^- + \mu^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Si assuma nei conti  $m_\mu = 100 \text{ MeV}/c^2$  e  $m_\pi = 150 \text{ MeV}/c^2$ .

1. Si calcoli l'energia minima  $\mathcal{E}_0$  dei  $\mu^-$  affinché la reazione sia possibile.
2. Sia  $\alpha$  l'angolo tra la direzione di incidenza dei fasci e la direzione della velocità della trasformazione di Lorentz, nel piano della reazione, che porta da  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{S}'$  tale che le energie dei fasci incidenti siano uguali. Si determinino tali velocità in termini di  $\alpha$  e  $\mathcal{E}$ .
3. i pioni prodotti in condizioni di energia minima in  $\mathcal{S}$  entrano in una regione ove è presente un campo magnetico uniforme e costante di modulo  $B = 10^7$  V/m, perpendicolare al piano della reazione. Si determinino i raggi delle traiettorie dei pioni prodotti e si discuta la forma delle loro traiettorie nei sistemi di riferimento  $\mathcal{S}'$  con  $\alpha$  e  $\mathcal{E}_0$ .

L'energia minima a cui avviene la reazione è la situazione in cui i  $\pi$  sono prodotti in soglia. Uguagliamo il quadrimomento nel centro di massa, prima e dopo l'urto, sfruttando la condizione di soglia

$$(2\mathcal{E}_\mu^*, 0, 0, 0) = (2m_\pi, 0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_\mu^* = m_\pi \quad p_\mu^* = \sqrt{m_\pi^2 - m_\mu^2}$$

Ora sfruttando una trasformazione di Lorentz, e scegliendo i  $\mu^-$  che viaggiano in verso positivo

$$\mathcal{E}_0 = \gamma_{CM} (\mathcal{E}_\mu^* + \beta_{CM} p_\mu^*)$$

$$\frac{\mathcal{E}_0}{2} = \gamma_{CM} (\mathcal{E}_\mu^* - \beta_{CM} p_\mu^*)$$

Si può trovare la velocità del centro di massa

$$\beta_{CM} = \frac{\mathcal{E}_\mu^*}{3p_\mu^*} = \frac{m_\pi}{3\sqrt{m_\pi^2 - m_\mu^2}}$$

Sostituendo nella prima equazione troviamo l'energia minima

$$\mathcal{E}_0 = 4m_\pi \sqrt{\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{8m_\pi^2 - 9m_\mu^2}} = 223.60 \text{ MeV}$$

Adesso per il secondo punto assumo che l'energia  $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_0$ . Scelgo la direzione  $x$  quella in cui è diretto il boost con velocità  $\beta$ , e la direzione su cui si scontrano i muoni è inclinata di  $\alpha$  rispetto all'asse  $x$ . Scelgo ancora che i  $\mu^-$  viaggino in direzione positiva, quindi

$$\mathcal{E}' = \gamma (\mathcal{E} - \beta p_- \cos \alpha)$$

$$\mathcal{E}' = \gamma \left( \frac{\mathcal{E}}{2} + \beta p_+ \cos \alpha \right)$$

Dunque

$$\mathcal{E} - \beta p_- \cos \alpha = \frac{\mathcal{E}}{2} + \beta p_+ \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\mathcal{E}}{2(p_+ + p_-) \cos \alpha}$$

In condizioni di energia minima i pioni prodotti hanno ugual energia e modulo del momento nel laboratorio. Dunque i raggi delle orbite sotto l'effetto del campo magnetico sono gli stessi. Con una trasformazione di Lorentz troviamo l'energia dei pioni nel laboratorio

$$\mathcal{E}_\pi = \gamma_{CM} \mathcal{E}_\pi^* = \gamma_{CM} m_\pi = 3m_\pi \sqrt{\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{8m_\pi^2 - 9m_\mu^2}}$$

Dunque il raggio è (opportunamente dividendo per  $c$  il momento perché è ancora in unità di  $1/c$ )

$$R = \frac{cp_\pi}{eB} = \frac{c \frac{3m_\pi}{c} \sqrt{\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{8m_\pi^2 - 9m_\mu^2}}}{eB} = \frac{m_\pi^2}{eB} \sqrt{\frac{1}{8m_\pi^2 - 9m_\mu^2}} = 7.5 \text{ m}$$

N.B. Ricordarsi di esprimere il momento in eV così da considerare la carica dell'elettrone pari ad 1.

La forma delle traiettorie in  $\mathcal{S}$  è chiara, sono delle orbite circolari. Nei sistemi  $\mathcal{S}'$ , visto che effettuiamo un boost, comparirà anche un campo elettrico che, dato che esiste  $\mathcal{S}$ , sarà ortogonale alla direzione del boost e del campo magnetico (sia vecchio che nuovo) e tale che  $B'^2 - E'^2 > 0$ . Allora qui la traiettoria sarà un'ellisse, ossia un cerchio schiacciato.

### Esame 11/07/2017

Un protone  $p$ , di momento  $p_1 = 0.3 \text{ GeV}/c$  urta nel laboratorio un antiprotone  $\bar{p}$  che ha energia doppia della sua, ossia  $2\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ . L'urto avviene con un angolo  $\theta = 60^\circ$ , provocando la reazione

$$p + \bar{p} \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Si assuma nei conti  $m_p = m_{\bar{p}} = M = 1 \text{ GeV}/c^2$  e  $m_\pi = m = 0.15 \text{ GeV}/c^2$ . Il  $\pi^+$  viene emesso in condizioni di energia massima e successivamente entra in una regione in cui è presente un campo elettromagnetico uniforme e costante con  $B = 10^8 \text{ V/m}$  lungo la direzione della bisettrice di  $\theta$ , e  $E = \frac{2}{3}B$  perpendicolare al piano della reazione.

1. Si calcoli la componente della velocità del centro di massa parallela alla direzione di  $B$ , nel laboratorio.
2. Si calcoli il momento del  $\pi^+$  appena dopo la reazione, nel laboratorio.
3. Supponendo che una volta entrato nella regione di campo elettromagnetico il  $\pi^+$  vi rimanga, calcolare l'intervallo di tempo minimo tra due istanti in cui la coordinata spaziale lungo la direzione del campo elettrico è la stessa.

# Parte II

## Fisica quantistica

# Capitolo 7

## Crisi della fisica classica

### 7.1 Introduzione

La meccanica quantistica è la teoria fisica che descrive le leggi che governano i fenomeni a livello microscopico, ma ha evidenti conseguenze anche nel mondo macroscopico: impenetrabilità dei corpi, stabilità di materia e colori, esistenza di laser e superconduttività sono degli esempi.

Essa ci costringe a rivedere il nostro concetto di particella e di onda, ma più in particolare modifica il concetto di posizione, traiettoria, velocità. Preliminarmente mettiamo in chiaro i seguenti concetti

- Le **particelle classiche** sono entità che possiamo "contare", nel senso che non possiamo trovare mezza particella classica. In più sono puntiformi e se ci immaginiamo di sparare un fascio di particelle contro uno schermo con due fenditure, ci aspettiamo che il numero di quelle che hanno attraversato lo schermo sia la somma tra quelle che sono passate per una fenditura e quelle che sono passate per l'altra. Possiamo individuare la loro traiettoria in una camera a nebbia.
- Le **onde classiche** non sono entità intere, a differenza delle particelle, e obbediscono al fenomeno dell'interferenza se mandiamo un'onda contro lo schermo citato in precedenza<sup>1</sup>. Se ad esempio consideriamo le onde elettromagnetiche il comportamento è descritto dalle equazioni di Maxwell.

Chiaramente la distinzione tra particelle e onde è ben definita. Il problema comincia a sorgere quando si fanno esperimenti che sembrano essere contrastanti. Il primo in ordine cronologico è l'esperimento di Young, che stravolge la concezione che si aveva sulla luce. Si pensava infatti che fosse fatta di corpuscoli, perciò un raggio di luce contro una fenditura avrebbe dovuto semplicemente limitare il numero di corpuscoli che passano per la fenditura, ma la traiettoria doveva comunque rimanere rettilinea. L'esperimento invece mette in evidenza il fatto che la luce sembra essere un'onda, visto che abbiamo il fenomeno della diffrazione. Con più fenditure poi si ha anche interferenza tra le fenditure.

Il problema sembra essere dunque risolto, a favore dell'ipotesi ondulatoria della luce. Nei primi anni '900 però si osserva l'**effetto fotoelettrico**, che analizzeremo più avanti, che

---

<sup>1</sup>A patto di scegliere una larghezza per le fenditure adeguata.

evidenzia il comportamento particellare della luce. Come si possono unificare due evidenze così contrastanti tra di loro?

Si prova allora a cercare di rivedere il concetto di onda e particella che sinora abbiamo avuto, facendo nascere il concetto di **particella quantistica**. Chiaramente devono ancora essere individuabili come quantità intere, perché possiamo sempre vederne la scia in una camera a nebbia o più direttamente ce lo conferma l'effetto fotoelettrico. Se però mandiamo un fascio di particelle quantistiche contro uno schermo con due fenditure, allora rileviamo il fenomeno dell'interferenza. Di più: l'interferenza si ha anche mandando le particelle **una alla volta**: il rivelatore vede che arrivano singolarmente, ma mandandone un grande numero si evidenzia anche il pattern solito dell'interferenza.

Per spiegare questo fatto possiamo supporre che le particelle quantistiche abbiano posizione e momento individuate da un'onda di **probabilità**, e allora possiamo ritornare a qualcosa di simile visto nel caso classico, ossia che l'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Analogamente si può definire un qualcosa del tipo

$$p(x) \propto |\psi(x)|^2$$

dove  $\psi$  rappresenta l'ampiezza dell'onda di probabilità. Il problema è che così mandiamo all'aria i nostri concetti di posizione, velocità, momento e traiettoria. É chiaro che in particolare il concetto di traiettoria non ha più alcun significato.

Siccome il rivelatore ci dice che le particelle sono comunque delle entità intere, ci possiamo inoltre chiedere attraverso quale delle due fenditure sia passata. Ma la probabilità ora si somma seguendo la sovrapposizione delle onde, dunque la probabilità che si ha quando entrambe le fenditure sono aperte è diversa dalla somma delle probabilità quando chiudiamo una delle due. Possiamo dunque mettere una "luce" per vedere noi stessi attraverso quale fenditura passa l'elettrone.

Ripetendo l'esperimento in questa configurazione vediamo attraverso quale delle due fenditure passa l'elettrone, ma la figura di interferenza scompare. A questo punto:

- Se quando non osserviamo riscontriamo una discrepanza tra il caso con due fenditure aperte e la somma dei casi con una fenditura chiusa allora non possiamo dire che l'elettrone passa da una delle due fenditure. Se fosse così, è chiaro che dovrebbe essere la somma e non dovrebbero interferire le due fenditure.
- Non possiamo neanche dire che l'elettrone passi per entrambe le fenditure, perché se cerchiamo di verificarlo sperimentalmente vediamo chiaramente che è in una sola delle due fenditure.
- Infine non possiamo dire che l'elettrone arrivi allo schermo finale senza passare per le due fenditure, perché se le chiudiamo entrambe non rileviamo nulla.

Sembra di essere giunti a un assurdo: non possiamo dire nè che l'elettrone passi per una fenditura né che non ci passi. Questo suggerisce infatti che il considerare che le particelle quantistiche abbiano una posizione non ha senso se non la osserviamo o la misuriamo (luce spenta). Possiamo trovarne la posizione soltanto misurando, ma così "disturbiamo" il fenomeno. La posizione non preesiste alla misura, come sempre abbiamo pensato, e questa è una caratteristica intrinseca delle particelle quantistiche perché Nettuno, ad esempio, avrebbe la stessa posizione sia che la misuriamo o no.

Si trova infine che la relazione che lega la natura particellare e ondulatoria delle particelle quantistiche è la **costante di Planck**  $h$ , che è piccolissima

$$h \sim 6 \cdot 10^{-34} \text{ kg m s}^{-2}$$

La sua piccolezza ci fa capire perché questo tipo di effetti, apparentemente contrastanti, si manifestino solo su scala atomica e subatomica, ma che comunque hanno delle ripercussioni sul mondo macroscopico.

## 7.2 Descrizione matematica di un sistema fisico

Gli esperimenti sulle particelle quantistiche, che analizzeremo più avanti, ci hanno costretto a rivedere concetti talmente radicati nella fisica classica da essere considerati ovvi, ad esempio l'idea che le particelle abbiano una posizione, indipendentemente dal fatto che la misuriamo oppure no.

L'obiettivo è capire quali sono i requisiti minimi che una descrizione matematica deve avere per descrivere un sistema fisico: in pratica ci chiediamo quali sono gli **enti** e le **regole** che sono necessari alla descrizione del sistema.

Il modo più facile e intuitivo di approcciarsi è rivedere la formulazione matematica della teoria classica in modo tale da inserire delle modifiche ove necessario per rendere la teoria compatibile con la meccanica quantistica. La formulazione matematica più facile e aperta a modifiche che portano dal mondo classico a quello quantistico è la **formulazione hamiltoniana**.

La formulazione della fisica classica che abbiamo visto sinora è basata totalmente sulle posizioni  $\vec{x}$  e sulle velocità  $\dot{\vec{x}}$ : infatti, conoscendo la posizione iniziale e la velocità iniziale, l'equazione di Newton<sup>2</sup>

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = -\nabla V$$

è completamente risolta. Inoltre l'espressione dell'energia è in funzione delle sole velocità e posizioni

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x})$$

Dunque data l'unicità dell'equazione differenziale, l'evoluzione del sistema è determinata. La trattazione classica è infatti una trattazione **deterministica**. La formulazione newtoniana prevede

- $\vec{x}$  e  $\dot{\vec{x}}$  variabili legate in modo univoco l'una all'altra.
- l'equazione di Newton, del secondo ordine
- la formula per l'energia del sistema, completamente determinata se si conoscono posizione e velocità iniziali.

Invece nella formulazione hamiltoniana

- $\vec{x}$  e i momenti  $\vec{p}$  sono considerate variabili indipendenti.

---

<sup>2</sup>Considerando una forza conservativa.

- le equazioni di Hamilton, del primo ordine in  $\vec{x}$  e  $\vec{p}$
- la dinamica è determinata dall'energia, scritta in termini di posizioni e momenti, detta hamiltoniana  $H(\vec{x}, \vec{p})$

Consideriamo ora un sistema conservativo, e ricaviamo le equazioni di Hamilton. Sappiamo che vale l'equazione di Newton e la formula per l'energia. Inoltre  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ , scrivendo l'energia (o hamiltoniana)

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

Allora possiamo scrivere

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\partial H(\vec{x}, \vec{p})}{\partial \vec{p}}$$

dove la derivata parziale si intende fatta per componenti. Analogamente

$$\dot{\vec{p}} = F = -\nabla V = -\frac{\partial H(\vec{x}, \vec{p})}{\partial \vec{x}}$$

Solitamente in meccanica hamiltoniana si denotano le posizioni con  $q$  invece di  $\vec{x}$ , con componenti

$$q = \{q_1, \dots, q_n\} \quad p = \{p_1, \dots, p_n\}$$

allora le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases} \quad (7.1)$$

Anche in questa trattazione date le condizioni iniziali, l'evoluzione è completamente determinata. Vediamo che le equazioni di Hamilton descrivono la variazione temporale delle posizioni e dei momenti, e le abbiamo però ricavate in un caso particolare, ossia quello in cui  $p = mq$ . In realtà, questo non è sempre vero, ma le equazioni di Hamilton sono comunque valide.

Consideriamo una particella di carica  $e$  in presenza di campo magnetico  $\vec{B}$ . Sappiamo che  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  e l'equazione di Newton

$$m\ddot{\vec{q}} = e\dot{\vec{q}} \times \vec{B} = e\dot{\vec{q}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Facendo i conti si trova

$$m\ddot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} q_2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) - q_3 (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) \\ q_3 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) - q_1 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ q_1 (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) - q_2 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \end{pmatrix}$$

e si può verificare che, scritto in componenti, equivale alla seguente equazione

$$m\ddot{q}_i = e \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \quad *$$



in questo caso si verifica che l'hamiltoniana, in funzione di posizione e momenti, è

$$H(q, p) = \frac{(p - e\vec{A})^2}{2m}$$

ossia si ottiene da quella della particella libera con la **sostituzione minimale**  $p \rightarrow p - e\vec{A}$ . Se scrivessi invece l'hamiltoniana in funzione delle velocità, la forma sarebbe esattamente la solita. Questo mostra che in generale il momento non è sempre  $m\dot{q}$ . Verifichiamo che l'hamiltoniana è quella scritta sopra utilizzando le equazioni 7.1. Dalla prima

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i - eA_i}{m}$$

Inoltre

$$m\dot{q}_i = p_i - eA_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_i}{dt} = m\ddot{q}_i + e \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j}$$

Dalla seconda invece

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -e \sum_{j=1}^3 \frac{p_j - eA_j}{m} \left( -\frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right) = e \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i}$$

eguagliando le due espressioni del momento si ritrova esattamente \*.

**Notazione.** Lo spazio delle posizioni  $q$  e dei momenti  $p$  è detto **spazio delle fasi**  $\Omega$ , che in generale non è uno spazio vettoriale ma una varietà. Ad esempio nel caso di un pendolo, lo spazio delle fasi è un cilindro<sup>3</sup>.

Passiamo ora ad analizzare quali sono gli enti fondamentali della descrizione matematica di un sistema fisico. Preliminarmente ricordo la definizione di algebra

**Definizione.** Un'algebra su un corpo ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) è uno spazio vettoriale sullo stesso, con un'operazione di moltiplicazione associativa tra gli elementi.

1) Chiamiamo **osservabili**  $O$  le quantità fisiche che posso misurare, ad esempio la posizione, il momento, l'energia, il momento angolare. In formalismo hamiltoniano le osservabili sono funzione della posizione  $q$  e del momento  $p$  e formano un'algebra su  $\mathbb{R}$  commutativa. Questo vuol dire che, moltiplicando gli elementi dell'algebra si trova ancora un elemento della stessa, e non è importante l'ordine con cui si effettua questa operazione. Un chiaro esempio è l'energia

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

e sono presenti la moltiplicazione tra due elementi dell'insieme ( $p^2$ ), l'addizione e il prodotto per scalare.

Si voglia notare però che la proprietà di avere un'algebra commutativa su  $\mathbb{R}$  non proviene dalla in alcun modo dalla definizione di osservabile, ma bensì più dall'intuizione.

<sup>3</sup>E qui rimando al corso di fisica matematica.

2) Chiamiamo **spettro di  $O$**  i possibili valori ottenibili da una misura di una osservabile. Sappiamo che in meccanica classica  $O = f(q, p)$  e viene subito da pensare che l'immagine della funzione corrisponda allo spettro, che è contenuto dunque in  $\mathbb{R}$ . Dunque abbiamo l'identificazione tra immagine di  $f$  e i valori che  $f$  può assumere, ma anche questo deriva da un concetto radicato nell'intuizione, non dalla definizione di spettro, che di più ci aspettiamo sia continuo.

3) Abbiamo poi lo **stato del sistema**  $\Sigma$ , che caratterizza le informazioni su di esso. Abbiamo due casi

- Stati con informazione massimale: sono detti **stati puri** e sono quei casi in cui non si può conoscere di più. In questo campo lavora la meccanica.
- Stati con informazione minore: sono detti **stati misti** o miscele statistiche, e qui lavora la meccanica statistica.

In meccanica classica gli stati puri corrispondono ad avere le condizioni iniziali  $(q_0, p_0)$ , e quindi sono punti dello spazio delle fasi  $\Omega$ . Ma anche questo non discende dalla definizione di stato puro. In gli stati misti invece sono descritti da densità di probabilità normalizzate e definite positive.

Se non conosciamo posizione e momento, ad esempio considerando una particella in un gas, possiamo sapere quindi la **probabilità** che essa abbia momento  $p$  in un cubetto infinitesimo centrato su  $q$ . Data una particella all'equilibrio termodinamico a temperatura  $T$  in un volume  $V$ , con hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

sappiamo che la probabilità è data dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$\rho(q, p) = \frac{1}{Z} \chi_V(q) e^{-\frac{H}{kT}} \quad (7.2)$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann,  $Z$  una costante di normalizzazione e

$$\chi_V(q) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \in V \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e siccome deve essere normalizzata

$$Z = \int_{\Omega} \chi_V(q) e^{-\frac{H}{kT}} d^3q d^3p$$

Più in generale, nell'equazione 7.2 l'hamiltoniana può essere generica. In quel caso abbiamo la densità di probabilità di una particella di massa  $m$  contenuta in  $V$  alla temperatura di equilibrio  $T$ .

Passiamo ora ad analizzare quali sono le regole per analizzare le osservabili e studiare il sistema fisico. Definiamo dunque il **valor medio**  $\langle O \rangle_{\Sigma}$  o valore di aspettazione di un osservabile  $O$  sullo stato  $\Sigma$ . Questo deve interpretarsi come stima teorica del valor medio

sperimentale, il quale si ottiene misurando  $O$  in  $\Sigma$  un numero  $N$  di volte, ottenendo  $o_i$  misure dell'osservabile  $O$ . Si estrapola dunque il limite, pensando di farne così tante da far tendere  $N$  a infinito

$$\langle O \rangle_\Sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N o_i}{N}$$

In meccanica classica le osservabili sono funzioni continue, allora distinguendo il caso di stato puro e stato misto

$$\langle f(q, p) \rangle_{q_0, p_0} = f(q_0, p_0) \quad \langle f(q, p) \rangle_\rho = \int_\Omega dq dp \rho(q, p) f(q, p)$$

Oltre al valor medio, ci interessa anche la **fluttuazione** attorno a un valore  $a \in \mathbb{R}$ , che definiamo

$$(\Delta O)_{\Sigma_a} = \sqrt{\langle (O - a)^2 \rangle_\Sigma}$$

se  $a$  corrisponde al valor medio, allora ritroviamo lo scarto quadratico medio.

Uno stato in cui  $(\Delta O)_{\Sigma_a} = 0$  si dice **autostato** di  $O$  appartenente all'autovalore  $a$ , e in questo caso una misura di  $O$  nello stato  $\Sigma$  dà con certezza il valore  $a$ .

**Osservazione.** In meccanica classica tutti gli stati puri sono autostati di tutte le osservabili, infatti

$$\sqrt{\langle (f(q, p) - f(q_0, p_0))^2 \rangle_{q_0, p_0}} = 0$$

chiaramente deriva dalla definizione del valor medio, il che è come dire che basta calcolare la funzione nel punto e se conosco la funzione non ha senso che il valore calcolato abbia uno scarto.

**Esempio.** Consideriamo una particella libera di massa  $m$  che si muove in una sola direzione. Prendiamo l'hamiltoniana come osservabile

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

e come stato la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, e calcoliamo il valor medio

$$\langle H \rangle_\rho = \frac{\int_\Omega dq \chi_V(q) \int_\Omega dp e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \frac{p^2}{2m}}{\int_\Omega dq \chi_V(q) \int_\Omega dp e^{-\frac{p^2}{2mkT}}} = \frac{\int_\Omega dp e^{-\frac{p^2}{2m}\beta} \frac{p^2}{2m}}{\int_\Omega dp e^{-\frac{p^2}{2m}\beta}}$$

definendo  $\beta = \frac{1}{kT}$ . Allora non è difficile convincersi che

$$\langle H \rangle_\rho = -\frac{d}{d\beta} \left[ \log \left( \int_\Omega dp e^{-\frac{p^2}{2m}\beta} \right) \right]$$

cambiando variabile  $y = p\sqrt{\frac{\beta}{2m}}$

$$\langle H \rangle_\rho = -\frac{d}{d\beta} \left[ \log \left( \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \int_\Omega dp e^{-y^2} \right) \right] = -\frac{d}{d\beta} \left[ \log \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \log \left( \sqrt{2m} \int_\Omega dp e^{-y^2} \right) \right]$$

Il secondo addendo non dipende da  $\beta$ , quindi

$$\langle H \rangle_\rho = -\frac{d}{d\beta} \left[ \log \sqrt{\frac{1}{\beta}} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\beta} [\log \beta] = \frac{kT}{2}$$

La generalizzazione al caso tridimensionale è immediata: si basti ricordare che in quel caso il cambio di variabile è una funzione da  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dunque nel cambio di differenziale entra il determinante della matrice jacobiana. Siccome ogni componente del momento è moltiplicata per la stessa costante, non è altro che quest'ultima alla terza potenza. Dunque quando arriviamo al logaritmo, il fattore che viene fuori non è  $1/2$  ma  $3/2$ . Abbiamo così dimostrato il seguente teorema

**Teorema 7.1.** (*Equipartizione dell'energia*) *In meccanica classica, in condizioni di equilibrio a temperatura  $T$ , ogni grado di libertà quadratico in  $H$  contribuisce con  $\frac{kT}{2}$  all'energia media.*

Dunque ad esempio l'hamiltoniana di una particella legata a un oscillatore armonico

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + m\omega \frac{q^2}{2}$$

ha un'energia media di  $kT$  perché ha due gradi di libertà quadratici.

Infine analizziamo l'**evoluzione temporale** di un osservabile  $O$ ; ossia data  $O$  e stato  $\Sigma$  a  $t = 0$  dobbiamo descrivere come ottenere l'evoluto temporale  $\langle O(t) \rangle_\Sigma$ . Alternativamente si può studiare l'evoluzione dello stato  $\Sigma(t)$  e

$$\langle O(t) \rangle_\Sigma = \langle O \rangle_{\Sigma(t)}$$

Ad esempio consideriamo una particella che si muove di moto rettilineo; facciamo partire il cronometro e da quel momento rileviamo le posizioni. Questo è equivalente a studiare l'evoluzione dell'osservabile. Possiamo però anche resettare il cronometro ogni volta che la particella cambia posizione, e prendere quest'ultima come dato iniziale. Questo equivale a far evolvere lo stato. È evidente da questo esempio che non possiamo ottenere risultati diversi.

In meccanica classica l'evoluzione temporale delle osservabili è data dalla hamiltoniana  $H$ . Sappiamo che valgono, per un sistema conservativo, le equazioni 7.1. Allora, data una osservabile  $f(q, p)$

$$\frac{df(q, p)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

**Definizione.** Date  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  si definisce l'applicazione  $\{\cdot, \cdot\}$  chiamata **parentesi di Poisson**

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

La parentesi di Poisson soddisfa le seguenti proprietà algebriche

- è un'applicazione bilinare antisimmetrica, ossia

$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \quad \{g, f\} = -\{f, g\}$$

- vale l'identità di Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

- vale la regola di Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$$

Inoltre se applichiamo la parentesi a posizioni e momenti

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial q_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial q_j}{\partial q_l} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_l} 0 - 0 \frac{\partial q_j}{\partial q_l} = 0 \\ \{p_i, p_j\} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial p_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_j}{\partial q_l} = \sum_{l=1}^n 0 \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial p_i}{\partial p_l} 0 = 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_j}{\partial q_l} = \sum_{l=1}^n \delta_{il} \delta_{jl} = \delta_{ij}\end{aligned}$$

Dunque per ogni osservabile possiamo utilizzare le parentesi di Poisson per studiare l'evoluzione temporale dell'osservabile. Abbiamo però visto che c'è la possibilità di fissare l'osservabile e far evolvere lo stato: entrambi gli approcci sono stati utilizzati nello sviluppo della teoria quantistica, come vedremo. Per ora limitiamoci a verificare che siano del tutto equivalenti. Abbiamo bisogno del teorema di Liouville per lo spazio delle fasi, che enuncio in maniera breve e semplificata

**Teorema 7.2.** (di Liouville) *Il volume infinitesimo nello spazio delle fasi è invariante per traslazione temporale*

$$dq \, dp = dq(t) \, dp(t)$$

Ci interessa dunque verificare che

$$\langle f(q(t), p(t)) \rangle_{\rho(q_0, p_0)} = \langle f(q_0, p_0) \rangle_{\rho(q(t), p(t))}$$

Per definizione

$$\langle f(q(t), p(t)) \rangle_{\rho(q_0, p_0)} = \int_{\Omega} dq \, dp \, f(q(t), p(t)) \rho(q_0, p_0)$$

Ora trasliamo il tempo all'indietro, ossia mandiamo  $t \rightarrow 0$  e di conseguenza  $0 \rightarrow -t$

$$\langle f(q(t), p(t)) \rangle_{\rho(q_0, p_0)} = \int_{\Omega} dp(-t) \, dq(-t) \, f(q_0, p_0) \rho(q(-t), p(-t))$$

Per il teorema di Liouville

$$\langle f(q(t), p(t)) \rangle_{\rho(q_0, p_0)} = \int_{\Omega} dq \, dp \, f(q_0, p_0) \rho(q(-t), p(-t))$$

E adesso definendo  $-t = t$ , nel senso che gli cambiando nome tenendo presente che il tempo "scorre al contrario"

$$\langle f(q(t), p(t)) \rangle_{\rho(q_0, p_0)} = \int_{\Omega} dq \, dp \, f(q_0, p_0) \rho(q(t), p(t)) = \langle f(q_0, p_0) \rangle_{\rho(q(t), p(t))}$$

Quindi i due approcci sono totalmente equivalenti a patto di far scorrere il tempo all'indietro nel secondo caso: questo può sembrare assurdo, ma basta un semplice esempio per chiarirsi le idee. Si prenda ad esempio un vettore di  $\mathbb{R}^2$ : possiamo tenere fermo il piano e ruotarlo in senso orario, oppure tenere fermo il vettore e ruotare in verso opposto il piano. I due movimenti, a un occhio esterno sono totalmente equivalenti.

# Capitolo 8

## Esperimenti che portano alla crisi

### 8.1 Il corpo nero

Abbiamo visto che in meccanica classica lo spazio delle fasi è un insieme di punti  $(q, p)$ , che corrispondono agli stati puri: questa proprietà, seppur intuitiva, ha cominciato a vacillare con Planck.

Quest'ultimo si occupava di studiare della radiazione di una cavità perfettamente assorbente a temperatura  $T$ , e riteneva che lo studio andasse affrontato con metodi statistici simili alla trattazione di Boltzmann dei gas. Delle osservazioni di Kirkchoff fatte su delle cavità composte di due materiali riscaldata, ci dicono che

$$P = \text{Energia emessa } (\nu) = \text{Energia assorbita } (\nu)$$

questa osservazione ha senso poiché, se deve rimanere a temperatura costante la cavità deve emettere la stessa energia alla stessa frequenza con il quale gli arriva, sennò si ha uno scompenso. Inoltre un altro risultato di Kirkchoff è che il **potere assorbente**, definito come

$$\frac{\text{Energia assorbita}}{\text{Energia incidente}}$$

dipende solo dalla temperatura  $T$  e dalla frequenza  $\nu$ , in alcun modo dal materiale. Definiamo inoltre il **corpo nero** un corpo tale per cui il potere assorbente sia uguale all'unità, come la cavità di Planck. Un buon corpo nero è ad esempio una scatola con un piccolo foro e pareti interne perfettamente riflettenti: la radiazione entrante viene ripetutamente riflessa e la probabilità che esca è praticamente nulla<sup>1</sup>.

Ci interessa trovare quale sia la densità di energia della radiazione, e da considerazioni termodinamiche si trova che deve soddisfare la **legge di Wien**

$$\rho(\nu, T) \propto \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Sperimentalmente si trova che

$$F\left(\frac{\nu}{T}\right) = e^{-\frac{b\nu}{T}} \quad \Rightarrow \quad \rho(\nu, T) = a\nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}}$$

---

<sup>1</sup>Attenzione, questo non vuol dire che non emette nulla: siccome la radiazione è tutta assorbita e il corpo è in equilibrio a  $T$ , esso dovrà emettere una radiazione (tipica del corpo nero appunto) per rimanere alla temperatura  $T$ .

dove  $a$  e  $b$  sono costanti. La funzione è nota come **curva di Wien** e il suo grafico lo riporto in figura 8.1.

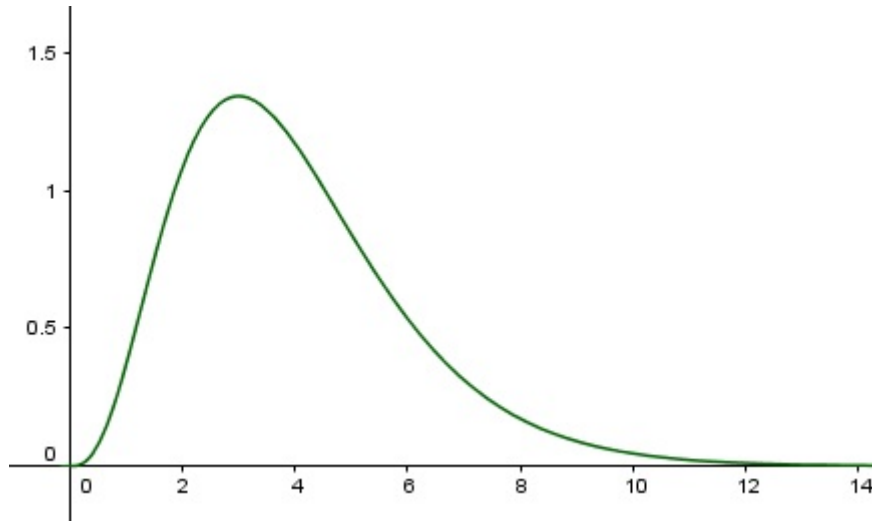


Figura 8.1: In ascisse ci sono le frequenze, la temperatura è costante.

Mostriamo che per ogni temperatura  $T$  fissata esiste una frequenza dominante<sup>2</sup>, infatti quando scaldo un metallo diventa di un determinato colore a seconda della temperatura.

$$\frac{d\rho}{d\nu} = a \left( 3\nu^2 e^{-\frac{b\nu}{T}} - \nu^3 \frac{b}{T} e^{-\frac{b\nu}{T}} \right) = a\nu^2 e^{-\frac{b\nu}{T}} \left( 3 - \frac{b\nu}{T} \right)$$

Esiste, come si vede anche dal grafico, un solo punto critico che è un massimo. Troviamo così la legge dello spostamento di Wien

$$\nu = \frac{3T}{b} \quad (8.1)$$

In effetti, assumendo che le stelle si comportino approssimativamente come corpi neri, possiamo dedurre la temperatura dal colore della stella: le stelle blu sono le più calde, quelle rosse le più "fredde".

Se integriamo la legge di Wien nelle frequenze, troviamo l'energia totale della radiazione

$$\mathcal{E}(T) = \int \nu^3 d\nu F\left(\frac{\nu}{T}\right) = T^4 \int y^3 F(y) dy$$

con il cambio di variabile  $y = \nu/T$ . Allora abbiamo trovato la **legge di Stefan-Boltzmann**

$$\mathcal{E}(T) \propto T^4$$

Quello che induce Planck a pensare che la radiazione di corpo nero vada interpretata similmente a quanto fatto prima da Boltzmann è che nell'esponente dell'esponenziale è presente la temperatura a denominatore, simile al peso statistico nella legge di Maxwell-Boltzmann. In effetti Planck ebbe ragione, successivamente viene confermato che la radiazione è come un gas di fotoni.

---

<sup>2</sup>Che si vede anche dal grafico.

Come già detto facendo incidere della radiazione sul corpo nero stiamo spostando l'equilibrio, esso emetterà radiazione al fine da ritornare all'equilibrio: questo fa venire in mente a Planck che si può schematizzare la situazione come quella di atomi vibranti a cui si associa un oscillatore armonico, con tutte le frequenze possibili, in equilibrio a temperatura  $T$ .

Vogliamo quindi trovare la densità di frequenze, ossia quanti oscillatori armonici ci sono tra le frequenze  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ . Debye impone che, all'equilibrio termico, la radiazione sia composta da onde stazionarie. Per semplicità consideriamo una cavità cubica di lato  $a$ : definiamo il versore d'onda

$$\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = (u_x, u_y, u_z)$$

La condizione di stazionarietà ci dice che

$$a = n \frac{\lambda}{2}$$

che deve valere anche per le proiezioni sulle componenti del versore d'onda affinché i nodi siano sulla parete del cubo

$$au_x = n_x \frac{\lambda}{2} \quad au_y = n_y \frac{\lambda}{2} \quad au_z = n_z \frac{\lambda}{2}$$

Siccome il modulo del versore è unitario

$$1 = \frac{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}{a^2} \frac{\lambda^2}{4} \xrightarrow{\lambda=c/\nu} \frac{4\nu^2}{c^2} = \frac{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}{a^2}$$

ed esplicitando la frequenza

$$\nu = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \frac{c}{2a} \quad (*)$$

Ora immaginiamo di avere un sistema cartesiano su i quali assi mettiamo i valori  $(n_x, n_y, n_z)$ , che sono tutti e tre interi. Se non ci fosse il fattore  $c/2a$  avremmo un reticolo con passo di 1 unità; quel fattore semplicemente ci modifica il passo, che è proprio  $c/2a$ . Una figura in cui rappresento alcuni punti può essere d'aiuto per capire

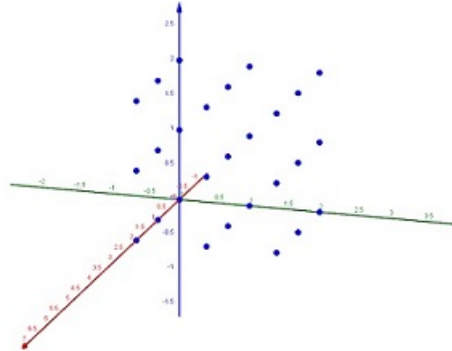


Figura 8.2: Qui ho utilizzato passo pari a 1, ma è indifferente.



Nell'espressione \* riconosciamo l'equazione di una superficie sferica di raggio  $\nu$  (se le coordinate del sistema le riscaldiamo del fattore  $c/2a$ ). Per il significato che hanno  $n_x, n_y, n_z$  sappiamo che sono positivi, dunque ci limitiamo all'ottante positivo del sistema. Per ogni frequenza  $\nu$  ci interessa sapere quanti punti ci sono nel guscio sferico di raggio  $\nu$  e spessore  $d\nu$  e qual è la loro densità. Il volume di questo guscio è

$$V_{guscio} = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{8}$$

Dunque il numero di punti (e quindi di oscillatori) sarà questo volume diviso per il volume del cubetto elementare del reticolo<sup>3</sup>. Allora il numero di oscillatori è

$$dN = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{8 \frac{c^3}{8a^3}}$$

Per trovare il numero di oscillatori nell'unità di volume dividiamo per il volume della cavità  $a^3$ , e successivamente per  $d\nu$  per avere la densità del numero di frequenze. Considerando un'onda polarizzata linearmente, può avere diverse due polarizzazioni, dunque la densità va moltiplicata per un fattore 2

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Questo ci dice in pratica qual è la densità degli oscillatori data una certa frequenza. Dunque se moltiplichiamo essa per l'energia media di un oscillatore, troviamo la densità di energia della radiazione<sup>4</sup>. L'energia media ci è data dal teorema di equipartizione dell'energia, e considerando che un oscillatore ha due gradi di libertà quadratici vale  $kT$ .

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (8.2)$$

abbiamo ricavato la **legge di Rayleigh-Jeans**, che soddisfa anche la legge di Wien! Infatti

$$\rho_{RJ} = \frac{8\pi k}{c} \nu^3 \frac{T}{\nu}$$

Il problema è che, se integriamo in tutte le frequenze chiaramente l'integrale diverge perché è una parabola. Si avrebbe dunque una quantità di energia infinita, ossia quella che viene chiamata **catastrofe ultravioletta**. Inoltre non ha massimo, contraddicendo il fatto che esiste una frequenza dominante per ogni temperatura di equilibrio.

La legge trovata per via teorica è evidentemente errata, ma si riscontra sperimentalmente che per piccole frequenze si verifica  $\rho_{RJ}$ , mentre ad alte frequenze la  $\rho_W$ . Secondo Planck dunque ci dev'essere qualcosa che interpola tra le due distribuzioni, poiché non si può mettere in dubbio il risultato degli esperimenti.

Confrontando la  $p_\nu$  con la curva di Wien possiamo trovare l'energia media nel caso studiato da Wien.

$$\begin{cases} \rho_W = \rho_\nu \mathcal{E} \\ \rho_W = a\nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_W = \frac{ac^3}{8\pi} \nu e^{-\frac{b\nu}{T}}$$

<sup>3</sup>Nel caso unidimensionale è più chiaro: se ho un'asta lunga un metro, e ogni 0.1 metri c'è un oscillatore, allora ci sono in tutto 10 oscillatori.

<sup>4</sup>Poiché essa è composta dagli oscillatori.

Planck pensa che la radiazione sia come un gas ideale, dunque il peso statistico da utilizzare è lo stesso che nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann,  $e^{-\beta H}$  con  $\beta = 1/kT$ . Notiamo che

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\int dp dq H e^{-\beta H}}{\int dp dq e^{-\beta H}} \right] \\
 &= -\frac{-(\int dp dq H^2 e^{-\beta H}) (\int dp dq e^{-\beta H}) + (\int dp dq H e^{-\beta H})^2}{(\int dp dq e^{-\beta H})^2} \\
 &= \frac{\int dp dq H^2 e^{-\beta H}}{\int dp dq e^{-\beta H}} - \frac{(\int dp dq H e^{-\beta H})^2}{(\int dp dq e^{-\beta H})^2} \\
 &= \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \Delta H^2
 \end{aligned}$$

dunque la derivata parziale rispetto a  $\beta$  del valor medio della hamiltoniana è pari alla fluttuazione quadratica media. Sappiamo inoltre che

$$\begin{cases} \langle H \rangle_{RJ} = \frac{1}{\beta} \\ \langle H \rangle_W = \frac{ac^3}{8\pi} \nu e^{-bk\beta\nu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta H_{RJ}^2 = \frac{1}{\beta^2} = \langle H_{RJ} \rangle^2 \\ \Delta H_W^2 = \frac{ac^3 bk\nu^2}{8\pi} e^{-bk\beta\nu} = h\nu \langle H \rangle_W \end{cases}$$

rinominando  $h = bk$ . I contributi dati da Rayleigh-Jeans e Wien sono chiaramente indipendenti, visto che le curve sono diverse. Dunque nella fluttuazione quadratica media i contributi si sommano. Planck propose

$$-\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = \langle H \rangle^2 + h\nu \langle H \rangle^2 = \left( \langle H \rangle + \frac{h\nu}{2} \right)^2 - \left( \frac{h\nu}{2} \right)^2 = \left( \frac{h\nu}{2} \right)^2 \left[ \left( \frac{\langle H \rangle + \frac{h\nu}{2}}{\frac{h\nu}{2}} \right)^2 - 1 \right]$$

Se ora cambiamo variabile

$$y = \frac{\langle H \rangle + \frac{h\nu}{2}}{\frac{h\nu}{2}} \Rightarrow \frac{h\nu}{2} (y - 1) = \langle H \rangle$$

$$-\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = -\frac{\partial \left( \frac{h\nu}{2} (y - 1) \right)}{\partial \beta} = -\frac{h\nu}{2} \frac{\partial y}{\partial \beta} = \left( \frac{h\nu}{2} \right)^2 (y^2 - 1)$$

dunque dobbiamo risolvere la seguente equazione differenziale a variabili separabili

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{h\nu}{2} (1 - y^2)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{1-y^2} &= \frac{h\nu}{2} \int d\beta \\
\text{set} \coth y &= \frac{h\nu}{2} \beta + c_0 \\
y &= \coth \left( \frac{h\nu}{2} \beta + c_0 \right) \\
\langle H \rangle + \frac{h\nu}{2} &= \frac{h\nu}{2} \coth \left( \frac{h\nu}{2} \beta + c_0 \right) \\
\langle H \rangle &= \frac{h\nu}{2} \left( \coth \left( \frac{h\nu}{2} \beta + c_0 \right) - 1 \right) \\
&= \frac{h\nu}{2} \left( \frac{e^{\frac{\beta h\nu}{2} + c_0} + e^{-\frac{\beta h\nu}{2} + c_0}}{e^{\frac{\beta h\nu}{2} + c_0} - e^{-\frac{\beta h\nu}{2} + c_0}} - 1 \right) \\
&= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu + 2c_0} - 1} = \frac{h\nu}{e^{2c_0} e^{\beta h\nu} - 1}
\end{aligned}$$

Se ora sviluppiamo al primo ordine il denominatore, per  $\nu \rightarrow 0$  troviamo

$$\langle H \rangle = \frac{h\nu}{e^{2c_0} - 1 + e^{2c_0} (h\nu\beta)}$$

E si vede che se  $c_0 = 0$  otteniamo la legge di Rayleigh-Jeans. Invece per  $\nu$  grandi chiaramente  $e^{-\beta h\nu} \ll 1$ , allora

$$\frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{h\nu}{1 - e^{-\beta h\nu}} e^{-\beta h\nu} \sim h\nu e^{-\beta h\nu}$$

E riproduciamo la legge di Wien a patto di scegliere  $a = \frac{8\pi h}{c^3}$ . Dunque secondo Planck la densità di energia è

$$\rho_P = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (8.3)$$

Se confrontiamo i grafici delle tre distribuzioni inoltre

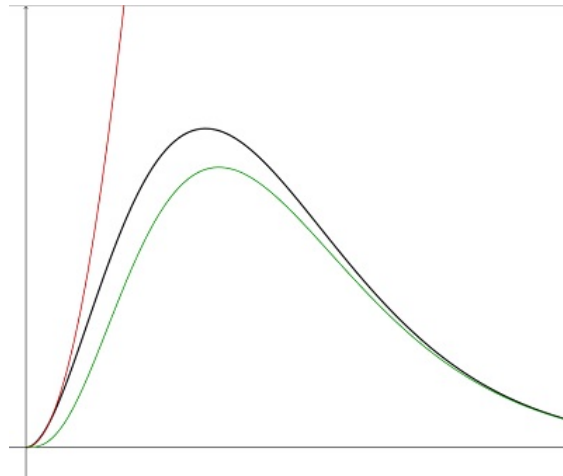


Figura 8.3: In ascisse ci sono le frequenze, in ordinate i valori della funzione.

La curva nera è quella di Planck, la rossa quella di Rayleigh-Jeans e la verde quella di Wien. Dunque abbiamo un riscontro grafico del fatto che la curva di Planck interpola le due distribuzioni. Si verifica che i dati sperimentali sono perfettamente in accordo con la legge trovata e abbiamo anche il massimo che permette di trovare la frequenza dominante per ogni temperatura.

Nel 1906 Planck riottiene lo stesso risultato proseguendo per una strada alternativa. Assume che lo spazio delle fasi dell'oscillatore sia diviso in celle. Consideriamo un oscillatore a energia fissata

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}(2\pi\nu)^2 q^2$$

e sappiamo che fissato un valore dell'energia essa rimane costante perché non ci sono forze dissipative. Dunque

$$1 = \frac{p^2}{2m\mathcal{E}} + \frac{m(2\pi\nu)^2}{2\mathcal{E}} q^2$$

Gli insiemi di livello nello spazio delle fasi sono ellissi concentriche, con semiassi dipendenti dal valore dell'energia

$$a = \sqrt{2m\mathcal{E}} \quad b = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_n}{m}} \frac{1}{2\pi\nu}$$

L'area dell'ellisse  $n$ -esimo sarà dunque

$$\pi ab = \frac{\mathcal{E}}{\nu}$$

Allora Planck divide in celle ellittiche, ossia in settori ellittici di area

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\nu} = \frac{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n}{\nu} = h$$

Questo è come dire che le energie che gli oscillatori possono essere solo dei multipli di  $h\nu$ , perché l'area dell'ellisse  $n$  esimo conterrà  $n$  settori ellittici, dunque

$$\mathcal{E}_n = nh\nu$$

Supponiamo allora che la densità sia comunque data dal peso statistico di Boltzman,, ma stavolta è una densità di probabilità discreta perché i valori dell'energia non sono continui

$$\rho_n = ce^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}}$$

con  $c$  come costante di normalizzazione. Calcoliamo l'energia media della radiazione sommando su tutti gli oscillatori, facendo in pratica una media pesata

$$\langle H \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = -\frac{d}{d\beta} \left[ \log \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu n} \right) \right]$$

Siccome per  $\beta > 0$  l'esponenziale è minore di 1, allora riconosciamo la serie geometrica

$$\langle H \rangle = -\frac{d}{d\beta} \log \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right) = \frac{d}{d\beta} \log (1 - e^{-\beta h\nu}) = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Il risultato è immediato: se però consideriamo lo spazio delle fasi diviso in celle, non è più un insieme di punti come lo era finora. Non ha più senso ora che le variabili, le osservabili siano rappresentate da punti, funzioni sullo spazio delle fasi poiché questo ha perso la sua caratteristica di essere un insieme continuo di punti. Per Planck lo spazio delle fasi è **quantizzato** dalla costante  $h$ .

## 8.2 Effetto fotoelettrico ed effetto Compton

Esaminiamo ora l'effetto fotoelettrico che, come già anticipato, mette in evidenza la natura particellare della luce in un periodo in cui l'esperimento di Young aveva convinto del fatto che avesse una natura ondulatoria.

Si manda un raggio di luce a frequenza sufficientemente alta su un metallo e in tempi brevi si rilevano degli elettroni che lasciano il metallo. Si nota inoltre che più è alta la frequenza maggiore è l'energia con cui i fotoni vengono rilevati. Classicamente è assurdo che:

1. Dalla trattazione delle onde elettromagnetiche con le equazioni di Maxwell, sappiamo che un'onda ha energia proporzionale all'intensità che a sua volta è proporzionale all'ampiezza dell'onda al quadrato. Il fatto che un elettrone assorba abbastanza energia da staccarsi dal metallo è consistente con la teoria classica. Calcoliamo qual è il tempo necessario a rompere il vincolo: consideriamo ad esempio una lastra di sodio. Sperimentalmente si ottengono fotoelettroni con un'energia dell'onda di luce per unità di tempo e superficie pari a  $10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  con  $10^{19}$  atomi in un metro quadro. Dunque per ogni atomo, l'energia per unità di tempo è

$$\frac{10^{-6}}{10^{19}} = 10^{-25} \text{ W}$$

Per rompere il legame serve circa 1 eV, e 1 J è pari a  $\sim 6 \cdot 10^{18}$  eV. Dunque la potenza in elettronvolt è

$$6 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-25} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1}$$

Questo significa che l'energia necessaria a strappare un elettrone la forniamo ogni

$$\frac{1}{6 \cdot 10^{-7}} = 1.6 \cdot 10^6 \text{ s}$$

mentre rileviamo che gli elettroni vengono emessi in tempi minori del nanosecondo. Totale incompatibilità della teoria classica con l'evidenza sperimentale.

2. Se la luce fosse fatta d'onde dovremmo trovare che l'energia è proporzionale all'intensità, ma sperimentalmente si trova che aumentando  $I$  aumenta il numero di elettroni emessi ma non la loro energia. Come è possibile se ho dato più energia per unità di tempo e superficie?
3. Si trova invece che più alta è la frequenza più energia hanno i fotoelettroni, il che è assurdo classicamente perché l'energia di un'onda non dipende dalla sua frequenza.

Einstein propose di spiegare il fenomeno con la supposizione che la luce fosse fatta di particelle, ognuna delle quali ha energia  $\mathcal{E} = h\nu$ .

1. Se la luce è una pioggia di fotoni che colpisce la superficie, vuol dire che gli elettroni sono emessi a causa dell'urto. I tempi degli urti sono brevi, dunque sarebbe spiegato il breve tempo di emissione.

2. I fotoni trasportano energia proporzionale alla frequenza, dunque indipendente dall'ampiezza dell'onda al quadrato. Se aumentiamo l'intensità aumentiamo il numero di fotoni, dunque ha senso che vengano emessi più elettroni.

La differenza sostanziale tra onda e corpuscolo è che la prima fa sì che l'energia sia distribuita equamente sulla superficie, mentre per le particelle l'energia è localizzata. Vediamo la previsione teorica di Einstein: l'energia del fotone che urta un elettrone, per conservazione dell'energia, deve essere uguale all'energia di legame + l'energia cinetica del fotoelettrone. Allora, formalmente definiamo  $\mathcal{E}_{legame} = h\nu_0$ . Allora

$$\mathcal{E}_{fotone} - \mathcal{E}_{legame} = h(\nu - \nu_0) = \mathcal{E}_{cinetica}$$

La frequenza di soglia  $\nu_0$  dipende dal metallo. La legge ci dice in pratica che nel piano  $(\nu, \mathcal{E}_{cinetica})$  dobbiamo trovare delle rette tutte di pendenza  $h$  che partono dal punto  $(\nu_0, 0)$

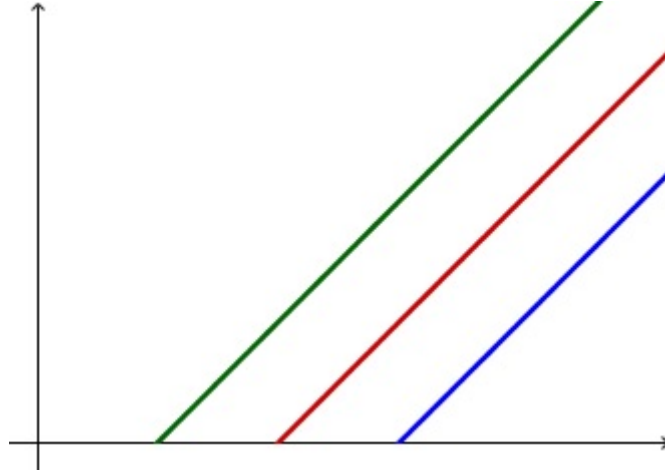


Figura 8.4: In ascisse ci sono le frequenze, nelle ordinate l'energia cinetica dei fotoelettroni.

Si trova riscontro sperimentale dell'effetto, che dunque mette in crisi la visione classica della luce.

Un altro esperimento che mette in evidenza la natura particellare della luce è il seguente: se mandiamo una radiazione (raggi X per la precisione) contro un elettrone libero, classicamente che aspettiamo che oscilli con la stessa frequenza dell'onda incidente, in pratica seguendo l'oscillazione del campo elettrico. Sperimentalmente invece non si riscontra, anzi la frequenza dell'oscillazione è diversa da quella dell'onda incidente. Se invece interpretiamo la luce come fatta di particelle, dobbiamo analizzare un urto elastico, dunque per la conservazione del quadrimomento (facendo riferimento alla figura 8.5)

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \phi + p_e \cos \theta \\ 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \phi - p_e \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cp_e \cos \theta = h\nu - h\nu' \cos \phi \\ cp_e \sin \theta = h\nu' \sin \phi \end{cases}$$

$$(cp_e)^2 = (h\nu - h\nu' \cos \phi)^2 + (h\nu' \sin \phi)^2 = (h\nu)^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \phi + (h\nu')^2$$

Per la conservazione dell'energia inoltre

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} \Rightarrow (h(\nu - \nu') + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4 = +c^2 p_e^2$$

$$\begin{aligned} (h(\nu - \nu') + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4 &= (h\nu)^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \phi + (h\nu')^2 \\ h^2 (\nu - \nu')^2 + 2h(\nu - \nu') m_e c^2 &= (h\nu)^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \phi + (h\nu')^2 \\ 2h(\nu - \nu') m_e c^2 &= 2h^2 \nu \nu' (1 - \cos \phi) \\ \frac{m_e c^2}{h} \left( \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) &= 1 - \cos \phi \end{aligned}$$

Da cui segue la formula dell'effetto Compton

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \phi) \quad (8.4)$$

La quantità  $\frac{h}{m_e c^2}$  ha le dimensioni di una lunghezza ed è chiamata **lunghezza d'onda Compton dell'elettrone**

$$\lambda_e = \frac{6 \cdot 10^{-34} \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-1}}{10^{-31} \text{ Kg } 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Dunque siccome il fattore nelle parentesi è compreso tra 0 e 2, la differenza tra  $\lambda$  e  $\lambda'$  è molto piccola. La differenza si vede se le lunghezze d'onda sono dell'ordine di  $\lambda_e$  in modo tale che anche lo scarto sia dello stesso ordine.

L'ambiguità della natura della luce è una prova evidente del fatto che la teoria classica vada rivista completamente per capire i fenomeni prima su scala microscopica, e poi capire le ripercussioni sul mondo macroscopico.

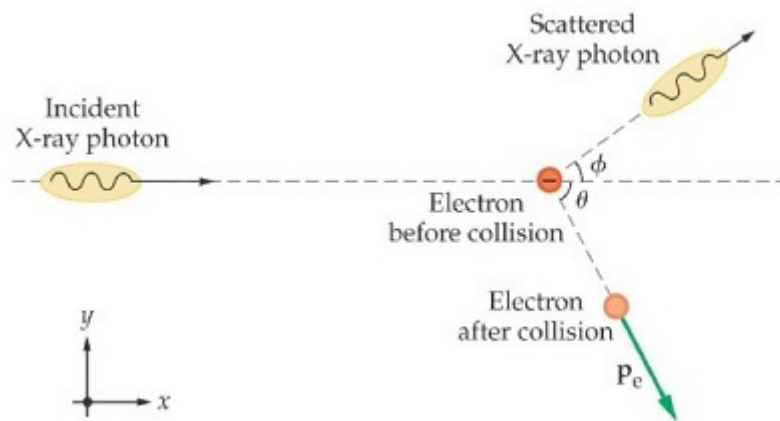


Figura 8.5:

# Capitolo 9

## La teoria quantistica

L'obiettivo ora è quello di capire come è fatto lo spazio delle fasi e le osservabili, poiché è evidente che in una nuova teoria non può essere fatto come nella teoria classica, fatto che è stato messo in evidenza da Planck. I primi passi per costruire la teoria quantistica sono stati fatti analizzando fenomeni spettroscopici e cercando di capire la struttura atomica.

### 9.1 Spettroscopia

Se prendiamo un gas di atomi di idrogeno e lo portiamo a una certa temperatura questo emette luce poiché gli atomi si eccitano. L'analisi delle frequenze della luce emessa, ossia lo spettro di emissione, è chiamata spettroscopia.

Le righe di emissione seguono una struttura regolare e non sono permesse tutte le frequenze. Queste ultime si possono trovare tramite la **formula di Rydberg**

$$\nu_{m,n} = cR \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (9.1)$$

ove  $R = 1.1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$  è la costante di Rydberg. Per come è strutturata la formula, possiamo individuare  $\nu_{mn} = \nu_m - \nu_n$ . Si vede subito che la somma di due frequenze  $\nu_{mn}$  e  $\nu_{rs}$  è possibile se e soltanto se  $n = r$ , altrimenti non ritroviamo la formula di Rydberg

$$\nu_{mn} + \nu_{rs} = \nu_m - \nu_n + \nu_r - \nu_s$$

e se  $n = r$

$$\nu_{mn} + \nu_{ns} = \nu_m - \nu_n + \nu_n - \nu_s = \nu_m - \nu_s = \nu_{ms}$$

questa regola di addizione è nota come **regola di Ritz-Rydberg**. Dunque l'insieme delle frequenze permesse non costituisce un gruppo per l'addizione, poiché la somma non è permessa per tutti gli elementi dell'insieme. In più l'insieme è discreto, non continuo. La discretezza e la non gruppabilità sono incomprensibili per la fisica di inizio '900.

In questo periodo l'atomo era pensato secondo il **modello di Thompson**. È globalmente neutro, ha un involucro "sferico" di carica positiva e ci sono delle cariche negative localizzate dentro la nuvola di carica positiva<sup>1</sup>. Rutherford cerca di verificare questa teoria con

---

<sup>1</sup>La situazione è simile a quella che troviamo nel panettone e nei canditi che sono sopra. Infatti viene chiamato modello a panettone o plum pudding.



un esperimento: manda un fascio di particelle alfa (ioni  $He^{+2}$ ) contro una lamina d'oro molto sottile in modo tale che nello spessore non ci sia una grossa quantità di atomi. Asintoticamente l'urto con l'atomo della particella alfa è elastico, dunque

$$\mathcal{E}(t = -\infty) = \mathcal{E}(t = +\infty)$$

perché in quei tempi la particella è libera. Allora questo ci dice anche che

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p = mv$$

Supponendo ora che venga deflessa di un angolo  $\theta$ , possiamo trovare il modulo del vettore  $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

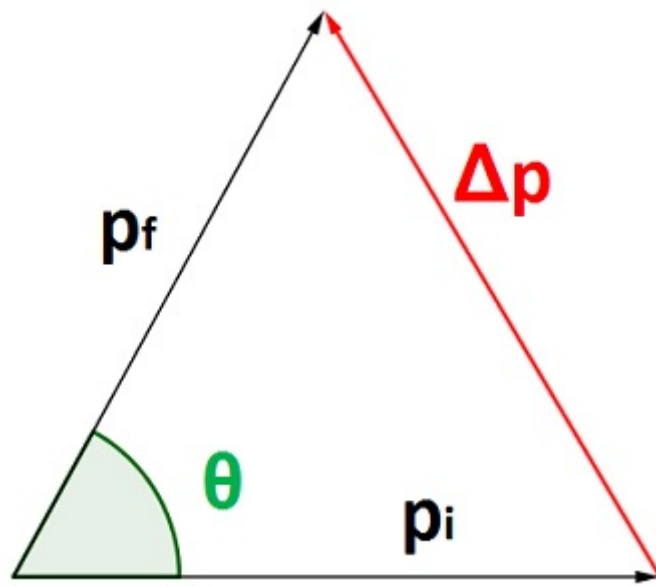


Figura 9.1:

Dalla figura si vede subito che  $|\Delta\vec{p}| = 2mv \sin \frac{\theta}{2}$ . Definiamo ora il **parametro di impatto**  $b$  come la distanza dal centro dell'atomo e la direzione della particella incidente. Il parametro di impatto ottimale, in cui si ha massima deflessione è circa il raggio dell'atomo: se fosse  $b > r$  allora la forza di interazione sarebbe minima poiché la particella  $\alpha$  vede l'atomo sostanzialmente neutro; se fosse  $b < r$  ci sarebbe meno carica positiva<sup>2</sup> che interagisce con essa e anche la possibilità di incontrare cariche negative che minimizzano la deflessione.

Sappiamo inoltre il valore del raggio dell'atomo misurato utilizzando un metallo come reticolo di diffrazione

$$r \sim 10^{-10} \text{ m}$$

Ora, per  $\theta$  piccoli possiamo approssimare  $|\Delta\vec{p}| = mv\theta$ . Inoltre supponendo che la velocità sia pressoché costante in modulo, il tempo dell'urto sarà dell'ordine di  $\Delta t = \frac{2r}{v}$ , come se il moto fosse rettilineo uniforme e di lunghezza pari al diametro dell'atomo. Nell'intervallo di tempo dell'urto allora considero l'atomo come una carica positiva, poiché sarà dominante.

<sup>2</sup>Per il teorema di Gauss conta solo la sfera "sotto" la particella.

Fuori da quell'intervallo lo considero neutro. Allora dal teorema dell'impulso<sup>3</sup> e sapendo che l'energia delle particelle  $\alpha$  è circa  $10^{-12}$  J e che  $Z = 50$  per l'oro

$$\begin{aligned} F\Delta t &= |\Delta\vec{p}| \\ \frac{2Ze^2}{r^2} \frac{2r}{v} &= mv\theta \\ \theta &= \frac{4Ze^2}{mv^2r} = \frac{2Ze^2}{\mathcal{E}r} \sim 2 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

L'angolo è pressoché nullo, non ci si aspettava dunque alcuna deflessione, ma che le particelle passassero attraverso la lamina. Ma sperimentalmente si registrano un numero non trascurabile di grandi deflessioni, in parte vengono anche respinte indietro. Questo porta a pensare che ci sia una regione interna all'atomo in cui la forza di repulsione aumenta vistosamente, in modo da giustificare le grandi deflessioni. Sostanzialmente dunque l'atomo ha un certo raggio, ma il nucleo in cui è concentrata la carica positiva è molto più piccolo. Se le particelle  $\alpha$  passano vicine al nucleo le cariche negative non lo schermano, dunque si ha una grande forza repulsiva. Si pensa infatti che ci sia una carica positiva al centro e degli elettroni che orbitino intorno, simile al sistema planetario. L'analogia ci porta a vedere subito che le particelle seguano la traiettoria di un'iperbole, come un corpo soggetto alla forza gravitazionale di un'altra massa che però ha abbastanza energia da non rimanere intrappolato.

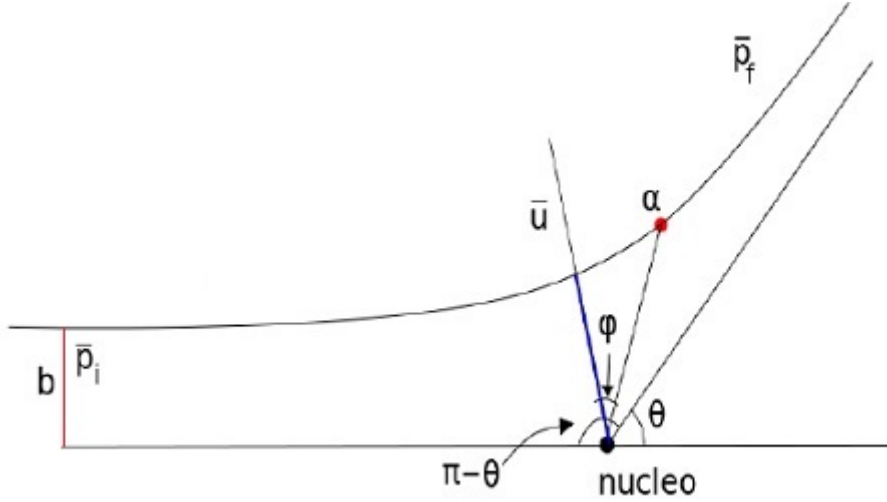


Figura 9.2: La situazione esaminata da Rutherford.

Definiamo  $\hat{u}$  come il versore di  $\Delta\vec{p}$ , allora  $|\Delta\vec{p}| = \langle \hat{u}, \Delta\vec{p} \rangle$ , mentre  $\varphi$  è l'angolo al variare del tempo della direzione della forza con il versore della variazione del momento. Allora

<sup>3</sup>La forza coulombiana è scritta nel sistema di Gauss, dunque

$$e_{gauss}^2 = \frac{e_{mks}^2}{4\pi\epsilon_0} = 2.3 \cdot 10^{-28}$$

per il teorema dell'impulso<sup>4</sup>

$$|\Delta \vec{p}| = \hat{u} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) \cos \varphi = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} d\varphi \frac{dt}{d\varphi} F(\varphi) \cos \varphi$$

Siccome la forza è centrale, il momento angolare si conserva, dunque

$$|L| = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = mvd \sin \frac{\pi - \theta}{2} = mvb$$

dove a sinistra è il momento angolare con la solita formula  $\vec{r} \times m\vec{v}$ , mentre a destra è il momento a  $t = -\infty$ . Dunque troviamo che

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{bv}$$

Allora

$$2mv \sin \frac{\theta}{2} = |\Delta \vec{p}| = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} d\varphi \frac{r^2}{bv} F(\varphi) \cos \varphi = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} d\varphi \frac{r^2}{bv} \frac{2Ze^2}{r^2} \cos \varphi$$

Dunque

$$2mv \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2Ze^2}{bv} \left[ \sin \left( \frac{\pi + \theta}{2} \right) - \sin \left( -\frac{\pi - \theta}{2} \right) \right] = \frac{2Ze^2}{bv} 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

Abbiamo trovato una formula per  $b(\theta)$

$$b(\theta) = \frac{2Ze^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2}$$

Ora, definiamo la **sezione d'urto differenziale**, che in pratica corrisponde alla probabilità di diffusione tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$

$$\sigma(\theta) = \frac{\# \text{ di particelle diffuse in } d\theta \text{ per unità di tempo}}{\# \text{ numero di particelle incidenti per unità di tempo e superficie}}$$

Se prendiamo delle unità di superficie e di tempo tali per cui arriva 1 particella per unità, allora il denominatore è evidentemente unitario. Il numero di particelle che viene deflesso tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  è pari al numero di quelle che passano nella corona circolare spessa  $db$  (vedi figura DA METTERE), dunque sono pari, in valore numero, all'area della corona per via delle unità di misura prese  $\# = 2\pi b db$ .

Dalla figura troviamo subito che l'angolo solido sotteso alla corona circolare più a destra è  $2\pi \sin \theta d\theta$ . In questa le particelle sono distribuite uniformemente, poiché non c'è motivo che ci sia un punto della corona privilegiato. Dobbiamo quindi normalizzare la sezione d'urto

$$\sigma(\theta) = \frac{2\pi b}{2\pi \sin \theta} \frac{db}{d\theta} = \frac{b}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{db}{\cos \frac{\theta}{2} d\theta}$$

<sup>4</sup>Il disegno non rende tantissimo, ma la direzione del versore  $u$  dovrebbe essere quella della bisettrice tra le direzioni del momento, ossia la retta obliqua e la retta orizzontale. Per questo motivo l'angolo  $\varphi$  va da  $-\frac{\pi-\theta}{2}$  a  $\frac{\pi+\theta}{2}$ .

E dalla formula di  $b$  ricaviamo

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{Ze^2}{2\mathcal{E}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Dunque sostituendo e svolgendo i passaggi algebrici

$$\sigma(\theta) = \left( \frac{Ze^2}{2\mathcal{E}} \right) \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (9.2)$$

e questa è la formula della sezione d'urto trovata da Rutherford. I dati sperimentali sono in buon accordo con la predizione trovata. Conoscendo inoltre l'energia delle particelle  $\alpha$ , possiamo ricavare il raggio del nucleo atomico focalizzandoci su quelle particelle che hanno parametro di impatto nullo, poiché sono quelle che urtano fisicamente la carica positiva al centro. Questo ci dice che  $\theta = \pi$ , che sono proprio quelle particelle che tornano indietro. La sezione d'urto in questo caso è facile da calcolare, se si pensa che essendo  $\theta = \pi$  vengono deflesse indietro sulla base di un cilindro di raggio pari a quello atomico. Dunque la sezione d'urto, per le unità prese, è proprio pari a questa base

$$\pi r_n^2 = \left( \frac{Ze^2}{2\mathcal{E}} \right) \Rightarrow r = \frac{Ze^2}{2\sqrt{\pi}\mathcal{E}} \sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Quindi il raggio nucleare è almeno di cinque ordini di grandezza più piccolo del raggio atomico, una stima che si accorda con quello che vediamo dall'esperimento e il modello dell'atomo planetario di Rutherford.

Il modello dunque sembra reggere il confronto con l'esperimento, ma ha evidenti problemi a livello teorico. È chiaro infatti che la carica positiva nel nucleo attragga a sé gli elettroni orbitanti, che dunque rende il sistema instabile. L'elettrone è in continua rotazione, dunque è una carica accelerata che irradia e perde energia. Calcoliamo quanto tempo, indicativamente, esaurisce la sua energia e collide con il nucleo.

La potenza irradiata da una carica accelerata è data dalla formula di Larmor<sup>5</sup>

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left| \ddot{\vec{x}} \right|^2 \quad (9.3)$$

L'orbita è circolare, dunque

$$\left| \ddot{\vec{x}} \right| = \frac{v^2}{r}$$

Dalla legge di forza di Newton sappiamo invece che

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{mr^2}$$

Allora sostituendo i vari pezzi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^6}{c^3 m^2 r^4}$$

Ora, assumendo che la potenza sia costante possiamo ricavare una stima molto indicativa del tempo necessario a finire l'energia. Altrimenti dovremmo integrare ambo i membri

---

<sup>5</sup>Scritta con la carica nel sistema di Gauss.

tenendo conto del fatto che il raggio diminuisce al variare del tempo. Allora, sapendo che l'energia emessa dev'essere uguale a quella potenziale iniziale

$$\tau = \frac{\mathcal{E}}{\frac{dE}{dt}} = \frac{\frac{e^2}{r}}{\frac{2}{3} \frac{e^6}{c^3 m^2 r^4}} = \frac{3}{2} \frac{c^3 m^2 r^3}{e^4} = \frac{3}{2} \frac{(3 \cdot 10^8)^3 (10^{-30})^2 (10^{-10})^4}{(3 \cdot 10^{-28})^2} \sim 10^{-10} \text{ s}$$

Un tempo che non è assolutamente comparabile al fatto che gli atomi che ci compongono hanno più o meno l'età dell'Universo.

Si mostra inoltre che l'atomo di Rutherford implicherebbe spettri di emissione continui, in totale contrasto con la formula di Rydberg e l'evidenza sperimentale data da studi spettroscopici.

Allora Bohr (1912) per ovviare momentaneamente il problema propone una **teoria provvisoria** basata su alcuni postulati, in attesa che vengano spiegati

1. Un elettrone in un atomo può occupare solo orbite circolari con modulo del momento angolare pari a  $L = n\hbar$ , con  $n \in \mathbb{N}$  e  $\hbar = h/2\pi$ .
2. Un elettrone può saltare da un'orbita  $n$  permessa a un'altra  $m$ , rispettivamente di energia  $\mathcal{E}_n$  e  $\mathcal{E}_m$ , emettendo un'onda elettromagnetica di frequenza

$$\nu_{mn} = \frac{|\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n|}{h}$$

Vediamo la "giustificazione" del primo postulato. Se supponiamo che lo spazio delle fasi sia quantizzato come prevede Planck, allora l'area dell'ellisse  $n$ -esima è

$$\oint pdq = nh$$

Se il moto è circolare però il momento ha modulo costante e  $dq = r d\varphi$ . Allora

$$nh = \oint pdq = mv2\pi r \Rightarrow L = mvr = n\hbar$$

Vediamo ora che i due postulati ci conducono alla formula di Rydberg, ovviando anche al problema dell'emissione continua di radiazione.

Per Newton, considerando un atomo di idrogeno, sappiamo che

$$mv^2 \frac{1}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

Consideriamo ora la quantizzazione del momento angolare  $mvr = n\hbar$ . Se ora eseguiamo il rapporto membro a membro

$$\frac{mv^2}{mvr^2} = \frac{e^2}{r^2 n\hbar} \Rightarrow v = \frac{e^2}{n\hbar}$$

Allora

$$\mathcal{E}_n = -\frac{mv_n^2}{2} = -\frac{m}{2} \frac{e^4}{\hbar^2 n^2}$$

dove il segno  $-$  è dovuto al fatto che, essendo orbite circolari, l'energia potenziale (di legame) è negativa. Se scriviamo  $\nu_{mn}$  come data dal postulato 2, e supponendo  $n > m$

$$\nu_{mn} = \frac{|\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n|}{h} = \frac{me^4}{2\hbar^2 h} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Che corrisponde esattamente alla formula di Rydberg se poniamo

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2 hc} = \frac{(9 \cdot 10^{-31})(2.3 \cdot 10^{-28})^2}{2(10^{-34})^2(6.6 \cdot 10^{-34})(3 \cdot 10^8)} \sim 1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Che trova buon accordo con la costante misurata sperimentalmente. Nella teoria proposta da Bohr ci dev'essere dunque qualcosa di vero, il problema è spiegare i postulati.

Nel 1914 arriva ulteriore conferma delle idee di Bohr dall'esperimento di Franck-Hertz. Lo schema dell'apparato utilizzato è sostanzialmente questo

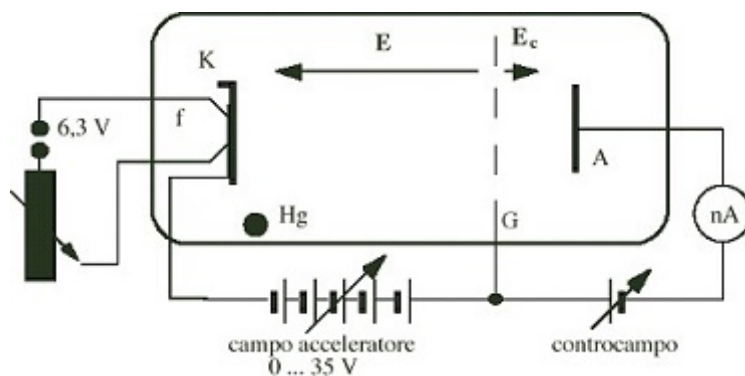


Figura 9.3: Il tubo centrale è riempito con gas di mercurio a bassa pressione. A sinistra c'è un catodo a potenziale  $V_c$  che fornisce un fascio di elettroni che viaggia verso l'anodo a potenziale  $V_a$ . In mezzo è posta una griglia a potenziale  $V_g$ , in modo tale che  $V_c < V_a < V_g$  e tale che dopo la griglia gli elettroni vengano lievemente frenati. Lo strumento in grado di misurare la corrente tra i due elettrodi e conosciamo i valori delle tensioni.

Il grafico tra corrente e tensione trovato è quello di seguito

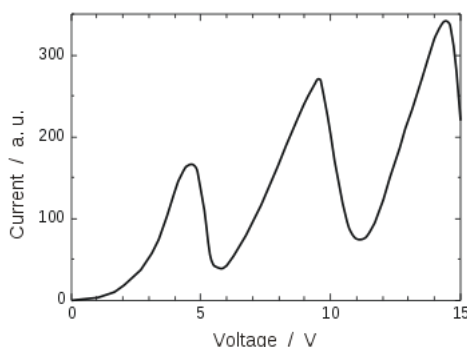


Figura 9.4:

Le idee di Bohr spiegano i picchi e le cadute di corrente al variare del voltaggio. Se assumiamo che le orbite degli elettroni del mercurio sono discrete allora per eccitare uno di

questi è necessario fornirgli un dato valore di energia diciamo  $\mathcal{E}$ . L'energia degli elettroni prima di attraversare la griglia è  $E = e(V_g - V_c) = eV$ . Supponiamo che all'inizio  $E < \mathcal{E}$ . In questo caso allora gli elettroni passano urtando gli atomi di mercurio, ma al massimo vengono deviati perché non hanno abbastanza energia per far saltare gli elettroni di Hg. Dunque quando superano la griglia, siccome il sistema è tale che  $V_a - V_g \ll V$ , gli elettroni riescono ad arrivare all'anodo senza troppi problemi. Se però aumentiamo  $V$  in modo tale che  $E = \mathcal{E}$  allora gli elettroni cedono la loro energia agli elettroni del mercurio e non riescono più a passare la barriera di potenziale  $V_a - V_g$ , dunque si ha una diminuzione della corrente. Il fenomeno si ripete analogamente fino al prossimo picco e decrescita. Quindi l'esperimento è un'altra prova del fatto che c'è della verità nelle supposizioni di Bohr.

Arrivati a questo punto però abbiamo due leggi di radiazione: una continua, data dalla formula di Larmor, e una discreta, data dall'idea di Bohr dei salti quantici. Quest'ultimo pensa che la teoria classica sia data come limite per  $n \rightarrow \infty$  (**principio di corrispondenza**). Quindi sapendo che

$$L = n\hbar$$

e definendo la costante  $\alpha$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

possiamo scrivere la frequenza emessa nell'ipotesi di salto quantico tra due livelli  $n$  e  $n-1$  se  $n$  è molto grande, grazie alla formula di Rydberg

$$\nu_{n-1,n} = \frac{mc^2\alpha^2}{2h} \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{mc^2\alpha^2}{2h} \left( \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{mc^2\alpha^2}{2h} \frac{2}{n^3}$$

Ora invece, ragioniamo in modo classico. Supponendo che l'elettrone orbiti in una circonferenza tale per cui il momento angolare è  $n\hbar$ . Inoltre da un conto precedente sappiamo che

$$v = \frac{e^2}{\hbar n}$$

Allora

$$mvr_n = m \frac{e^2}{\hbar n} r_n = n\hbar \quad \Rightarrow \quad r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2} = \frac{n^2 \hbar}{m\alpha c}$$

Sappiamo inoltre che

$$m\omega r_n = m2\pi\nu r_n^2 = n\hbar \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{n\hbar}{2\pi m r_n^2} = \frac{n\hbar m^2 c^2 \alpha^2}{2\pi m n^4 \hbar^2} = \frac{mc^2 \alpha^2}{h} \frac{1}{n^3}$$

Che è la stessa frequenza trovata con la formula di Rydberg. Dunque effettivamente mandando  $n \Rightarrow \infty$  si ottiene il risultato della teoria classica.

Dall'espressione dell'energia necessaria a stare nell'orbita  $n$ -esima notiamo che essa decresce (a meno del segno  $-$ ) con l'inverso del quadrato di  $n^2$ , dunque per  $n$  grandi le differenze in energia tra due orbite diventano sempre più piccole. Questo fa sì che le orbite si infittiscano sempre di più all'aumentare di  $n$  e che si raggiunga un  $r_\infty$  tale che l'elettrone si sgancia dal suo nucleo. Questo è detto **raggio di ionizzazione**.

Un altro esperimento che avvalora la tesi di Bohr è quello effettuato da Moseley. Spara degli elettroni ad alta energia (accelerati con una differenza di potenziale) contro un bersaglio metallico, e rileva raggi  $X$  in uscita. Costruendo un grafico con  $(\lambda, I_{rad})$  gli si presenta la seguente situazione

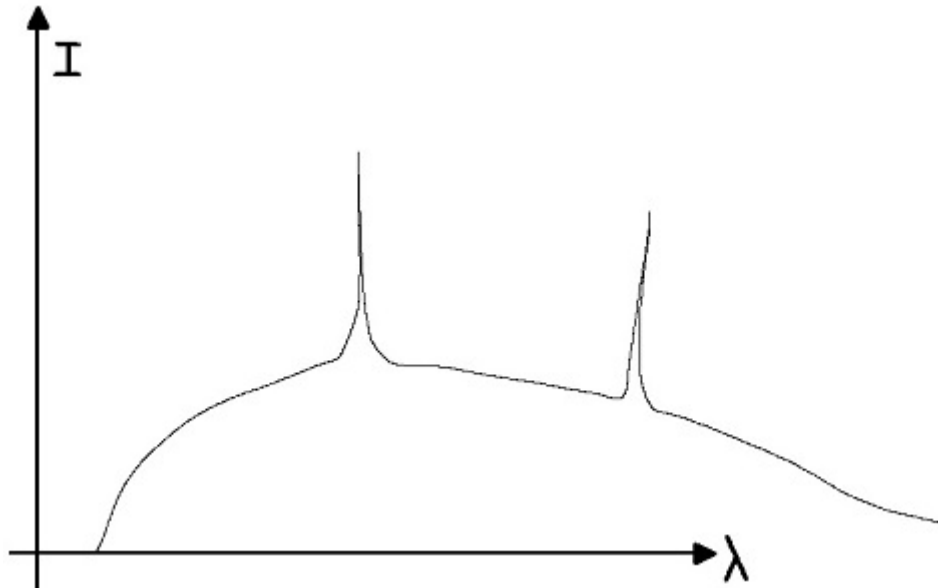


Figura 9.5:

- Si vede chiaramente un continuo di emissione, ossia che per una data lunghezza d'onda sono presenti tutte le intensità da un massimo al valore nullo. Questo è segno del fatto che gli elettroni vengono frenati quando entrano nel materiale, e come suggerisce la legge di Larmor, emettono un continuo di frenamento dovuto alla decelerazione. Dunque questo ha senso anche a livello classico.
- Ci sono dei picchi in corrispondenza di alcune lunghezze d'onda. Questo è un tipico effetto di salto quantistico. Sicuramente degli elettroni accelerati colpiscono degli elettroni legati a dei nuclei del metallo slegandoli dall'orbita e facendo rimanere dunque una lacuna. Allora un altro elettrone, su un'orbita con più alta energia prende il suo posto ma irradia una quantità di energia quantizzata e con una ben precisa lunghezza d'onda, dal secondo postulato.
- La soglia a livello classico è incomprensibile, ed è frutto della natura particellare della radiazione: essa sappiamo che è composta di fotoni. Se l'elettrone accelerato dà tutta la sua energia a un singolo fotone, questo è il caso in cui si emette un fotone con energia massima

$$\mathcal{E}_{max} = h\nu_{max} = eV \quad \Rightarrow \quad \lambda_{min} = \frac{c}{\nu_{max}} = \frac{ch}{eV}$$

Dunque questo esperimento non soltanto conferma le teorie di Bohr, ma mette in evidenza che è possibile trovare entrambe le visioni (classica e non) insieme.



Finora in pratica abbiamo sempre assunto che l'atomo avesse simmetria sferica, ma abbiamo considerato le orbite circolari: ha senso dunque chiedersi in che piano giacciono le orbite e come sono orientate. Un tentativo potrebbe essere studiare l'atomo immerso in un campo magnetico, e vede come si comporta e se succede qualche fenomeno interessante. Zeeman nota che, in un campo magnetico non troppo intenso, le righe spettrali dell'atomo si dividono talvolta in due o tre righe molto vicine tra di loro (in frequenza) proporzionali all'intensità del campo.

Supponiamo di porre il campo in direzione  $z$  arbitraria, e siccome è poco intenso possiamo trascurare i termini  $B^2$ . L'hamiltoniana dell'elettrone ( $-e$  con  $e > 0$ ) nell'atomo è

$$\mathcal{E} = \frac{\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

Se  $B$  è uniforme allora

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \times \vec{x}}{2}$$

Trascurando i termini di ordine superiore al primo

$$\mathcal{E} \sim \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{mc}\vec{p} \cdot \frac{\vec{B} \times \vec{x}}{2} - \frac{e^2}{r} + o(|B|)$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale  $\vec{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{x}) = \vec{B} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) = \vec{B} \cdot \vec{L} = BL_z$  Dunque l'energia

$$\mathcal{E} \sim \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{2mc}BL_z - \frac{e^2}{r} + o(|B|)$$

Se la componente del momento angolare fosse quantizzata, allora si spiegherebbe lo splitting delle righe, poiché ci sarebbero più valori dell'energia, dunque più frequenze, non contigue fra di loro. Questo è quello che propongono Bohr e Sommerfeld per spiegare l'effetto Zeeman. Dunque

$$L_z = m\hbar$$

Ad esempio se  $|L| = 2\hbar$ , ci sono 5 possibilità per la componente  $z$  del momento angolare, come in figura

Inoltre si deduce che se una delle componenti è quantizzata, le altre due non possono esserlo, poiché ruotando la figura 9.6 intorno all'asse verticale, quel che sto facendo è variando con continuità la componente  $x$  e  $y$ , senza introdurre alcuna modifica al sistema. Dalla rappresentazione in figura 9.6 nasce una visione dell'atomo che è comune a tutti, in figura 9.7.

La rappresentazione nasce dal fatto che la direzione del momento angolare  $L$  ci dice la direzione della circonferenza in cui orbitano gli elettroni, e dunque il piano di giacitura dell'orbita. Se si confrontano le due figure si vede che le circonferenze sono proprio quelle perpendicolari a  $L$  nella figura 9.6.

Una dubbio sorge ovvio, che presenta il problema di questo modello: il momento angolare è quantizzato lungo una direzione, ma essa è arbitraria. Se cambio direzione a  $B$  e rifaccio i calcoli trovo che quella direzione è ancora quantizzata, ma non può essere che le orbite subiscano una torsione o qualcosa del genere..

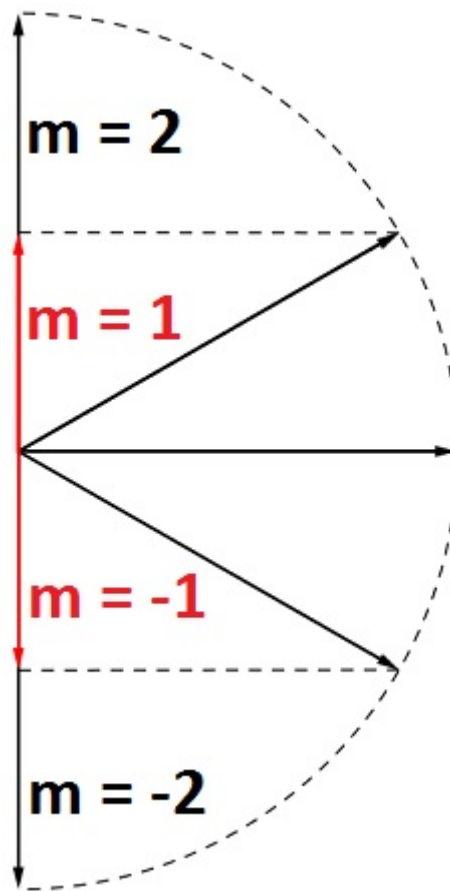


Figura 9.6: La componente  $z$  è quella verticale.  $L$  è rappresentato con il vettore nero (e coincide con la sua componente  $z$  se  $m = \pm 2$ ) mentre  $L_z$  è il vettore rosso.

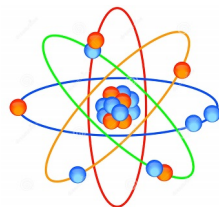


Figura 9.7:

## 9.2 Regola di commutazione di Heisemberg

Visto il susseguirsi di problemi e cercare di mettere delle pezze qua e là per cercare di spiegare gli esperimenti, nel 1925 Heisemberg è convinto che i tentativi di modellizzare l'atomo per spiegare i fenomeni non portino a buoni risultati e sostiene che siano sufficienti i principi base della meccanica classica e i risultati, evidenti, della spettroscopia.

Cosa sappiamo di sicuro dell'atomo, dalla spettroscopia?

- Ha un **raggio finito**, perché se riesco a togliere degli elettroni a un atomo vuol dire che c'è una distanza tale per cui l'elettrone non è più legato.
- È **stabile** o ha un tempo di decadimento molto lungo, altrimenti non esisteremmo.
- **Non è caotico** ma ha una struttura regolare, ben definita, si vede dalla estrema regolarità dello spettro.

Viene in soccorso il seguente teorema

**Teorema 9.1.** (di Arnol'd) *Un sistema stabile, non caotico e limitato allora è integrabile (ossia ha tre costanti del moto indipendenti). Inoltre tutte le osservabili sono funzioni del tempo multiperiodiche, cioè del tipo*

$$f(t) = \sum_{n_1, n_2, n_3} f_{\vec{n}} e^{i(\vec{n} \cdot \vec{\omega})t}$$

ove  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  sono dette frequenze fondamentali e  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ .

In particolare dalla formula di Larmor possiamo ricavare la funzione che governa l'intensità delle righe spettrali. Siccome per il teorema ogni funzione dev'essere multiperiodica, allora anche questa lo è, e dunque è caratterizzata da una frequenza esprimibile come combinazione lineare  $(\vec{n} \cdot \vec{\omega})$  delle frequenze fondamentali. Questo però implica che, se  $\vec{n} \cdot \vec{\omega}$  e  $\vec{m} \cdot \vec{\omega}$  sono frequenze permesse allora anche  $(\vec{n} + \vec{m}) \cdot \vec{\omega}$  lo è, perché è combinazione lineare di quelle fondamentali.

Questo è in chiaro disaccordo con la regola sperimentale di Ritz-Rydberg, poiché significherebbe che le frequenze sono un gruppo con l'addizione. Questo convince Heisemberg del fatto che nella teoria classica c'è qualcosa di "sbagliato" per non essere compatibile con la spettroscopia e propone di creare una nuova meccanica fondata su quest'ultima, a partire dalla regola di Ritz-Rydberg.

Abbiamo visto che l'atomo è multi-periodico, dunque schematizzabile in modo simile a un oscillatore armonico unidimensionale. Se vogliamo descrivere la coordinata  $q(t)$ , possiamo studiare l'oscillatore con la serie di Fourier

$$q(t) \rightarrow q_n e^{i\omega_n t}$$

Affinché la coordinata  $q(t)$  sia reale, deve essere  $q_{-n} = q_n^*$ . Questo perché, se esplicitiamo i termini  $n$  e  $-n$  dalla serie<sup>6</sup>

$$q(t) \rightarrow q_n e^{i\omega_n t} + q_{-n} e^{-i\omega_n t}$$

---

<sup>6</sup>Questo possiamo farlo se indicizziamo la somma da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Possiamo poi spezzarla in due somme, apparte il termine 0 che supponiamo sia reale, da 1 a  $+\infty$  e da  $-1$  a  $-\infty$ . Se nella seconda  $n \rightarrow -n$  allora abbiamo due somme da 1 a  $+\infty$ .

Ora vogliamo che la quantità a destra sia reale. Allora se utilizziamo la rappresentazione trigonometrica, sfruttando parità del coseno e disparità del seno

$$(q_n + q_{-n}) \cos(n\omega t) + i(q_n - q_{-n}) \sin(n\omega t)$$

A questo punto ci basta che  $(q_n + q_{-n})$  sia reale e  $(q_n - q_{-n})$  immaginario puro. Siccome  $q_n = a + ib$  è necessario che  $q_{-n} = a - ib$  ossia  $q_{-n} = q_n^*$ .

Abbiamo detto però che la meccanica classica va abbandonata perché presenta diversi problemi, ma ha senso definire una sorta di regola di **Fourier quantistica**

$$q_{mn}(t) \rightarrow q_{mn} e^{i\omega_{mn}t}$$

E sappiamo che deve valere la regola di Ritz-Rydberg

$$\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n = -(\omega_n - \omega_m) = -\omega_{nm}$$

Abbiamo appena visto inoltre che è necessario sia verificata la condizione di realtà  $q_{-n} = q_n^*$ . Seguendo invece la regola di Ritz-Rydberg invece

$$(e^{i\omega_{mn}t})^* = e^{-i\omega_{mn}t} = e^{i\omega_{nm}t}$$

Il che è equivale a dire che

$$q_{mn}^* = q_{nm}$$

Per Heisemberg ogni osservabile sarà del tipo

$$f_{mn}(t) \rightarrow f_{mn} e^{i\omega_{mn}t}$$

Come si fanno le operazioni tra osservabili? Supponiamo che  $a_{mn}$  e  $b_{mn}$  siano osservabili

$$(a + b)_{mn} = (a + b)_m - (a + b)_n = a_m - a_n + b_m - b_n = a_{mn} + b_{mn}$$

Dunque la somma si comporta come la somma tra reali. La moltiplicazione invece sfrutta la regola di Ritz-Rydberg, ossia che  $\omega_{mn} = \omega_{mk} + \omega_{kn}$

$$(ab)_{mn}(t) = (ab)_{mn} e^{i\omega_{mn}t} = (ab)_{mn} = (a)_{mk} e^{i\omega_{mk}t} (b)_{kn} e^{i\omega_{kn}t} = \sum_k a_{mk} b_{kn} e^{i\omega_{mn}t}$$

dove la somma serve a eliminare l'indice  $k$ . Dunque la moltiplicazione si esegue

$$(ab)_{mn}(t) = \sum_k a_{mk}(t) b_{kn}(t) \quad (9.4)$$

Notiamo che la formula è identica a quella della moltiplicazione matriciale righe per colonne. Questo suggerisce a Heisemberg che le osservabili in meccanica quantistica non hanno più la struttura di funzioni ma di operatori o matrici. In particolare ci chiediamo a questo punto quale sia l'algebra<sup>7</sup> per  $q_{mn}$  e  $p_{mn}$ . L'idea di Heisemberg è quella di utilizzare l'oscillatore armonico e la quantizzazione di Planck. Sappiamo che l'hamiltoniana dell'oscillatore classico è

$$H(q, \dot{q}) = \frac{M}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$$

<sup>7</sup>Definizione di algebra: sia uno spazio vettoriale  $V$  definito sul corpo  $K$ ; sia inoltre  $*$  un'operazione bilineare su  $V$ . Allora  $(V, *)$  è un'algebra su  $K$ .

e lo spazio delle fasi è diviso in celle, la cui  $n$ -esima ha area

$$I_n = \oint p dq = \frac{\mathcal{E}_n}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \mathcal{E}_n$$

la condizione di quantizzazione è

$$I_{n+1} - I_n = h$$

E sappiamo che classicamente la soluzione è data da

$$q(t) = q_1 e^{i\omega t} + q_{-1} e^{-i\omega t} \quad q_1^* = q_{-1}$$

Se vediamo la soluzione come uno sviluppo di Fourier, è come se fossero non nulli soltanto i termini con  $n = \pm 1$ . Calcoliamo l'hamiltoniana lungo la soluzione

$$\begin{aligned} H &= \frac{M}{2} \left( -\omega^2 (q_1 e^{i\omega t} - q_{-1} e^{-i\omega t})^2 + \omega^2 (q_1 e^{i\omega t} + q_{-1} e^{-i\omega t})^2 \right) \\ &= \frac{M}{2} (2\omega^2 q_1 q_{-1} + 2\omega^2 q_1 q_{-1}) = 2M\omega^2 q_1 q_{-1} \\ &= 2M\omega^2 q_1(t) q_{-1}(t) \end{aligned}$$

perché in ogni caso gli esponenziali si elidono. Dunque l'integrale di Planck lungo le soluzioni (in pratica sommiamo l'area di tutte le ellissi fino a raggiungere l'energia dell'oscillatore) si può scrivere

$$I = 4\pi M\omega q_1(t) q_1^*(t)$$

quanto fatto è valido classicamente. Heisenberg traduce la condizione che  $q_n \neq 0$  se  $n = \pm 1$  in, dato un  $m$  fissato

$$q_{mn} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = m \pm 1$$

ossia dice che sono non nulli solo quei termini con gli indici adiacenti al primo. Allora l'integrale di Planck viene sostituito con un oggetto a 2 indici

$$I_{mn} = 4\pi M\omega_{mn} q_{mn}(t) q_{mn}^*(t) = 4\pi M\omega_{mn} q_{mn}(t) q_{nm}(t)$$

La quantizzazione di Planck diventa allora

$$h = I_{n+1,n} - I_{n,n-1} = 4\pi M [\omega_{n+1,n} q_{n+1,n}(t) q_{n,n+1}(t) - \omega_{n,n-1} q_{n,n-1}(t) q_{n-1,n}(t)]$$

Per il teorema di Arnold sappiamo che le variabili del sistema sono multiperiodiche, dunque possono essere scritte tramite un esponenziale complesso, dunque ad esempio

$$\dot{q}_{n+1,n} = \frac{d}{dt} [q_{n+1,n} e^{i\omega_{n+1,n} t}] = i\omega_{n+1,n} q_{n+1,n} e^{i\omega_{n+1,n} t} = i\omega_{n+1,n} q_{n+1,n}$$

Possiamo allora riscrivere, nella condizione di quantizzazione

$$\omega_{n+1,n} q_{n+1,n}(t) = -i\dot{q}_{n+1,n}(t) \quad -\omega_{n,n-1} q_{n-1,n}(t) = \omega_{n-1,n} q_{n-1,n}(t) = -i\dot{q}_{n-1,n}(t)$$

Dunque (omettendo la dipendenza dal tempo)

$$h = 4\pi M \left[ \frac{\dot{q}_{n+1,n} q_{n,n+1}}{i} + \frac{\dot{q}_{n-1,n} q_{n,n-1}}{i} \right]$$

Definiamo ora il **commutatore**, nel modo seguente: date due matrici  $A$  e  $B$

$$[A, B] = AB - BA$$

dunque

$$[q, \dot{q}]_{nn} = (q\dot{q} - \dot{q}q)_{nn} = (q\dot{q})_{nn} - (\dot{q}q)_{nn}$$

Eseguiamo i calcoli come visto precedentemente, nel caso particolare in cui sono non nulli soltanto i termini con  $k = n \pm 1$

$$\begin{aligned} [q, \dot{q}]_{nn} &= q_{n,n+1} \dot{q}_{n+1,n} + q_{n,n-1} \dot{q}_{n-1,n} - \dot{q}_{n,n+1} q_{n+1,n} - \dot{q}_{n,n-1} q_{n-1,n} \\ &= i\omega_{n+1,n} q_{n,n+1} q_{n+1,n} + i\omega_{n-1,n} q_{n,n-1} q_{n-1,n} - i\omega_{n,n+1} q_{n,n+1} q_{n+1,n} - i\omega_{n,n-1} q_{n,n-1} q_{n-1,n} \\ &= 2i (\omega_{n+1,n} q_{n,n+1} q_{n+1,n} + \omega_{n-1,n} q_{n,n-1} q_{n-1,n}) \\ &= 2(\dot{q}_{n+1,n} q_{n,n+1} + \dot{q}_{n-1,n} q_{n,n-1}) \end{aligned}$$

E confrontando con l'espressione di  $h$  si vede che

$$\frac{ih}{2\pi M} = \frac{i\hbar}{M} = [q, \dot{q}]_{nn}$$

Siccome l'idea iniziale era quella di considerare un oscillatore armonico allora vale  $M\dot{q} = p$ , dunque

$$[q, \dot{q}]_{nn} = (q\dot{q} - \dot{q}q)_{nn} = \frac{1}{M} (qM\dot{q} - M\dot{q}q)_{nn} = \frac{1}{M} [q, p]_{nn}$$

Allora

$$[q, p]_{nn} = i\hbar$$

Quindi il commutatore di  $q$  e  $p$  ha elementi sulla diagonale  $i\hbar$  e si può dimostrare che gli altri sono tutti nulli. Otteniamo così la **regola di commutazione di Heisemberg**

$$[q, p]_{mn} = i\hbar \delta_{mn} \quad (9.5)$$

Infine possiamo dire che l'algebra di un oscillatore armonico è ancora scrivibile in termini delle osservabili  $q$  e  $p$ , ma il corpo su cui poggia non è reale, ma complesso. In più l'algebra non è commutativa dunque il prodotto delle osservabili è non commutativo<sup>8</sup>. Inoltre  $q$  e  $p$  hanno una struttura matriciale a valori complessi, dunque perde senso il fatto che esse abbiano un valore misurabile.

Volendo estendere la regola a uno spazio  $n$ -dimensionale

$$[q_i, p_j]_{mn} = i\hbar \delta_{mn} \delta_{ij}$$

---

<sup>8</sup>In pratica è diverso fare  $(qp)_{mn}$  e  $(pq)_{mn}$  e la differenza è data proprio dal commutatore.

### 9.2.1 Evoluzione temporale

Ci occupiamo ora di studiare l'evoluzione temporale delle osservabili. Innanzitutto ricordo che il teorema di Arnol'd ci assicura che

$$\dot{q}_{mn}(t) = i\omega_{mn}q_{mn}(t)$$

Dalla teoria provvisoria di Bohr sappiamo inoltre che

$$2\pi\omega_{mn} = \frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n}{h}$$

Allora

$$\dot{q}_{mn}(t) = \frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{i\hbar} q_{mn}(t)$$

A differenza di posizione, momento, integrale di Planck, l'energia è ancora un'osservabile a un solo indice. Allora definiamo l'energia quantistica

$$H_{mn} = \mathcal{E}_m \delta_{mn}$$

che è dunque una matrice diagonale e in particolare simmetrica ( $H_{mn} = H_{nm}$ ). Dunque possiamo in pratica sostituire  $H$  ad  $E$

$$\dot{q}_{mn}(t) = \frac{1}{i\hbar} (q_{mn}H_{nn} - H_{mm}q_{mn}) = \frac{[q, H]_{mn}}{i\hbar}$$

Si può inoltre dimostrare che il commutatore soddisfa le seguenti proprietà

- è un'applicazione bilineare antisimmetrica, ossia

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h] \quad [g, f] = -[f, g]$$

- vale l'identità di Jacobi

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$$

- vale la regola di Leibniz

$$[f, gh] = [f, g]h + [f, h]g$$

Quindi soddisfa le stesse proprietà delle parentesi di Poisson. Confrontando l'evoluzione temporale classica e quella quantistica il passaggio è stato

$$\{f, H\} = \frac{df}{dt} \longrightarrow \frac{[f, H]}{i\hbar} = \frac{df}{dt}$$

Allora possiamo dire che le osservabili quantistiche sono operatori la cui algebra si può ottenere da quella classica con la sostituzione appena presentata (**quantizzazione canonica**).

Riscrivendo la regola di commutazione in forma matriciale, senza indici

$$[q, p] = i\hbar \mathbb{I}$$

vediamo che la traccia della matrice del commutatore deve essere  $i\hbar \text{Tr} \mathbb{I}$ . Se però scriviamo la definizione di commutatore e utilizziamo le proprietà della traccia<sup>9</sup>

$$\text{Tr} [q, p] = \text{Tr} (qp - pq) = \text{Tr}(qp) - \text{Tr}(pq) = 0$$

Siamo apparentemente arrivati a un assurdo: abbiamo calcolato la traccia in due modi equivalenti e impeccabili, ma il risultato è diverso. L'errore è stato nell'assumere che gli operatori con cui stiamo lavorando abbiano effettivamente (o abbia senso definire) la traccia. Se supponiamo che gli operatori siano matrici di dimensione infinita, ossia  $\infty \times \infty$  allora non ha nemmeno senso definire la traccia e dunque il problema non si pone. In breve, abbiamo trovato che le osservabili quantistiche vivono nel campo complesso, l'algebra è non commutativa e sono strutturalmente delle matrici infinito dimensionali. Ma qual è lo spazio ambiente? Esiste una norma? Un prodotto scalare?

## 9.3 Meccanica ondulatoria

### 9.3.1 Tesi di de Broglie

Negli anni 1923 e 1924 De Broglie suggerisce che le particelle quantistiche abbiano una natura **ondulatoria**. L'intuizione originaria è relativistica, ma in realtà è irrilevante. Consideriamo un fotone, e se mettiamo insieme Planck + Einstein

$$\begin{cases} \mathcal{E} = h\nu \\ \mathcal{E} = c |\vec{p}| \end{cases} \Rightarrow h \frac{c}{\lambda} = c |\vec{p}| \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}$$

Se introduciamo il vettore d'onda, ricordando che  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$  troviamo

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \mathcal{E} = \hbar \omega$$

Tutte le formule non fanno alcun riferimento a  $c$ , e De Broglie suppone che valgano anche per particelle quantistiche con massa non nulla, ad esempio l'elettrone. Ossia, a ogni particella quantistica di energia  $\mathcal{E}$  e momento  $\vec{p}$  è associata un'onda di pulsazione  $\omega = \mathcal{E}/\hbar$  e vettore d'onda  $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ . L'idea spiega anche la quantizzazione di Bohr: se l'atomo è stabile allora l'onda di De Broglie deve essere stazionaria. Le onde stazionarie in un'orbita circolare<sup>10</sup> devono soddisfare

$$2\pi r = n\lambda$$

Utilizzando le formule di De Broglie

$$2\pi r = n \frac{h}{mv} = \Rightarrow mvr = |L| = n\hbar$$

<sup>9</sup>É lineare rispetto alla somma e non cambia commutando i fattori.

<sup>10</sup>Nella corda era sufficiente che fossero multipli semi-interi della lunghezza d'onda, perché bastava avessero un nodo all'inizio e alla fine, non era importante con che fase arriva. Invece in una circonferenza si deve richiudere su se stessa, e non può arrivarci dopo aver compiuto mezza oscillazione.



L'insieme discreto delle onde stazionarie sulla circonferenza porta alla quantizzazione di Bohr, e la stazionarietà spiega perché l'elettrone non emette e cade sul nucleo. Si può supporre che la velocità della particella sia la velocità di fase dell'onda?

$$v_f = \lambda \nu = \frac{h}{|\vec{p}|} \frac{\mathcal{E}}{h}$$

Utilizzando le formule relativistiche

$$v_f = \frac{mc^2 \gamma}{mv \gamma} = \frac{c^2}{v} > c$$

e troviamo chiaramente un assurdo, poiché la velocità di fase sarebbe maggiore della velocità della luce. Utilizzando formule classiche

$$v_f = \frac{mv^2}{2} \frac{1}{mv} = \frac{v}{2} \neq v$$

dunque neanche la fisica classica dà esito positivo.

Un'onda monocromatica, ossia con lunghezza d'onda fissata, deve essere infinitamente estesa, poiché se non lo fosse, nei punti in cui non c'è l'onda, ossia è nulla in pratica, la lunghezza d'onda è certamente nulla. L'onda si può descrivere in serie di Fourier, sovrapponendo infinite onde a lunghezza d'onda fissata. Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora si può sempre fare.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

Consideriamo una  $f(x)$  che rappresenta un'onda localizzata con  $\vec{k}$  piccato attorno a un  $\vec{k}_0$  tale che, con  $\vec{p}_0$  il momento della particella, soddisfi  $\vec{k}_0 = \hbar \vec{p}_0$ . Sia  $\omega(\vec{k})$  la legge di dispersione dell'onda, ossia le diverse pulsazioni a seconda del vettore d'onda. Allora i piani a fase costante sono dati da

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t = \text{costante}$$

E se definiamo la velocità di fase come  $\vec{v}_f = \omega/\vec{k}$

$$\vec{k}(\vec{x} - \vec{v}_f t) = \text{costante}$$

Ad esempio prendiamo come  $\tilde{f}(k)$  una gaussiana piccata su  $\vec{k}_0$

$$\exp\left(-\frac{(\vec{k} - \vec{k}_0)^2}{2\alpha}\right)$$

Ossia è sufficiente supporre  $\alpha$  piccolo. Allora utilizzando Fourier in tre dimensioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k e^{-\frac{(\vec{k} - \vec{k}_0)^2}{2\alpha}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Sviluppiamo attorno a  $\vec{k}_0$

$$\begin{cases} \vec{k} = \vec{k}_0 + (\vec{k} - \vec{k}_0) \\ \omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + \left. \frac{d\omega}{d\vec{k}} \right|_{\vec{k}_0} (\vec{k} - \vec{k}_0) \end{cases}$$

Allora

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k \, e^{-\frac{(\vec{k}-\vec{k}_0)^2}{2\alpha}} e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)(\vec{x}-\frac{d\omega}{d\vec{k}}t)} e^{i\vec{k}_0\vec{x}-\omega(k_0)t}$$

Cambio variabile da  $\vec{k}-\vec{k}_0 \rightarrow \vec{k}$ . Essendo soltanto una traslazione il differenziale non cambia, ne nell'integrale, ne nella derivata. Inoltre l'ultimo esponenziale è costante rispetto a  $\vec{k}$  dunque lo porto fuori

$$f(x) \sim e^{i\vec{k}_0\vec{x}-\omega(k_0)t} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k \, e^{-\frac{\vec{k}^2}{2\alpha}} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\frac{d\omega}{d\vec{k}}t)}$$

Ora completo il quadrato sapendo che

$$\frac{\vec{k}^2}{2\alpha} - i\vec{k} \left( \vec{x} - \frac{d\omega}{d\vec{k}}t \right) - \frac{\alpha}{2} \left( \vec{x} - \frac{d\omega}{d\vec{k}}t \right)^2 = \left( \frac{\vec{k}}{\sqrt{2\alpha}} - i \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}} \right) \left( \vec{x} - \frac{d\omega}{d\vec{k}}t \right) \right)^2$$

$$f(x) \sim e^{i\vec{k}_0\vec{x}-\omega(k_0)t} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k \, e^{-\frac{1}{2\alpha} [\vec{k} - i\alpha(\vec{x}-\frac{d\omega}{d\vec{k}}t)]^2} e^{-\frac{\alpha}{2} (\vec{x}-\frac{d\omega}{d\vec{k}}t)^2}$$

Trasliamo ancora una volta la variabile  $\vec{k} - i\alpha \left( \vec{x} - \frac{d\omega}{d\vec{k}}t \right) \rightarrow \vec{k}$ , e l'ultimo esponenziale è costante

$$f(x) \sim e^{-\frac{\alpha}{2} (\vec{x}-\frac{d\omega}{d\vec{k}}t)^2} e^{i\vec{k}_0\vec{x}-\omega(k_0)t} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k \, e^{\frac{\vec{k}^2}{2\alpha}}$$

Quindi in definitiva

$$f(x) \sim C e^{-\frac{\alpha}{2} (\vec{x}-\frac{d\omega}{d\vec{k}}t)^2} e^{i\vec{k}_0\vec{x}-\omega(k_0)t}$$

Il primo pezzo è una gaussiana, il secondo un'onda monocromatica con vettore d'onda  $\vec{k}_0$ . Quello che otteniamo è effettivamente l'onda monocromatica modulata dalla gaussiana, come in figura

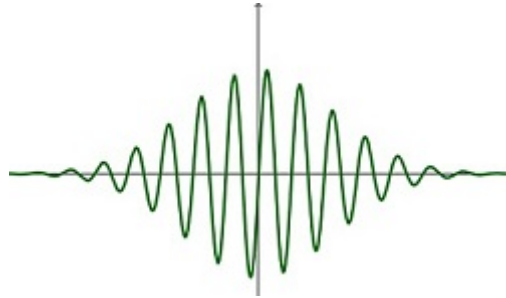


Figura 9.8:

Se calcoliamo allora la velocità di gruppo

$$|v_g| = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|} = \frac{d\hbar\omega}{d\hbar|\vec{k}|} = \frac{d\mathcal{E}}{d|\vec{p}|}$$

Utilizzando formule relativistiche

$$|v_g| = \frac{d\mathcal{E}}{d|\vec{p}|} = \frac{d}{d|\vec{p}|} \left[ \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \right] = \frac{c^2 |\vec{p}|}{\mathcal{E}} = |\vec{v}|$$

E anche utilizzando formule classiche, con l'energia di una particella libera<sup>11</sup>

$$|v_g| = \frac{d\mathcal{E}}{d|\vec{p}|} = \frac{d}{d|\vec{p}|} \left[ \frac{p^2}{2m} \right] = |\vec{v}|$$

Dunque l'idea corretta è che la particella sia localizzata nel pacchetto d'onde, che si muove con una velocità di gruppo pari alla velocità della particella. La verifica sperimentale delle supposizioni di De Broglie arriva nel 1927, con l'esperimento di Davisson e Germer. Sparano un fascio di elettroni su un cristallo che funge da reticolo e osservano un fenomeno di interferenza come se gli elettroni fossero un'onda di lunghezza d'onda data dalle formule di de Broglie.

Il cristallo funge da reticolo di passo pari alla distanza tra due atomi,  $d = 9 \cdot 10^{-11}$  m. Il fascio di elettroni ha energia  $\mathcal{E} = 54$  eV, dunque momento  $|p| = \sqrt{2m\mathcal{E}} = 4 \cdot 10^{-24}$  Kg m s<sup>-1</sup>. Allora ci aspettiamo una lunghezza d'onda di De Broglie pari a

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{|p|} = \frac{6 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 10^{-24}} = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Sperimentalmente invece il primo massimo di interferenza si trova ad un angolo di circa 65°, dunque

$$\lambda = 2d \sin \theta = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Decisamente un buon accordo con il valore di aspettazione.

Ci si potrebbe domandare perché non vediamo nessun effetto ondulatorio nei corpi macroscopici. Se consideriamo una palla di raggio di dieci centimetri, di massa pari a un kilogrammo e con la velocità di un metro al secondo, troviamo una lunghezza d'onda pari a  $h$ , che decisamente non è nella stessa scala di lunghezze. Invece per gli elettroni la lunghezza d'onda è sulla stessa scala dimensionale, dunque gli effetti si notano eccome.

### 9.3.2 L'equazione di Schrödinger

Schrödinger osservò che in meccanica classica le particelle compiono delle traiettorie, e similmente i raggi studiati in ottica geometrica hanno una traiettoria ben precisa (raggio riflesso, rifratto..). Sappiamo però che per i raggi l'ottica geometrica fallisce nella sua trattazione quando la luce incontra degli ostacoli paragonabili alla sua lunghezza d'onda, e in questo caso cadiamo nel campo dell'ottica fisica. Analogamente la meccanica classica, nella trattazione dell'atomo, fallisce se vediamo quest'ultimo in scale paragonabili alla

<sup>11</sup>O comunque solo quel termine che dipende dal modulo del momento.

scala atomica. Si chiede allora qual è il punto di massima vicinanza tra l'ottica geometrica e la meccanica classica (in formalismo hamiltoniano): questo è il **principio di minima distanza** che governa il moto dei raggi (Fermat) e le traiettorie delle particelle classiche (Maupertuis)

- **Principio di Fermat:** la traiettoria  $\gamma$  di un raggio di luce con indice di rifrazione  $n(q)$  tra due punti assegnati è quella che minimizza il seguente integrale

$$\int_{\gamma} n(q) ds(q)$$

ove  $ds$  è l'elemento di linea. Nell'ottica fisica sappiamo che  $v_f = c/n$ , dunque, siccome  $c$  è una costante è equivalente minimizzare

$$\int_{\gamma} \frac{n(q)}{c} ds(q) = \int_{\gamma} \frac{1}{v_f} ds(q)$$

- **Principio di Maupertuis:** nella meccanica dei sistemi conservativi, considerando l'energia  $\mathcal{E}$  costante, la traiettoria effettivamente eseguita dalla particella tra due punti assegnati compatibili è quella che minimizza

$$\int_{\gamma} |\vec{p}(q)| ds(q)$$

Sicuramente il momento dipende dalla posizione perché l'energia è fissata e il sistema è conservativo, dunque vale

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} - V(q) \quad \Rightarrow \quad |p| = \sqrt{2m(\mathcal{E} - V(q))}$$

Allora similmente a quanto fatto prima, minimizzare l'integrale di Maupertuis è equivalente a minimizzare lo stesso ma dividendo per l'energia, che è costante

$$\int_{\gamma} \frac{|p(q)|}{\mathcal{E}} ds(q) = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{2m(\mathcal{E} - V(q))}}{\mathcal{E}} ds(q)$$

Allora l'analogia tra Fermat-Maupertuis funziona se

$$\frac{1}{v_f} \longleftrightarrow \frac{\sqrt{2m(\mathcal{E} - V(q))}}{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{2m(\mathcal{E} - V(q))}}{\hbar\omega}$$

E dunque

$$\frac{\omega}{v_f} \longleftrightarrow \frac{\sqrt{2m(\mathcal{E} - V(q))}}{\hbar}$$

Siccome l'energia è costante, allora anche  $\omega$  lo sarà, poiché  $\hbar$  è costante. Allora mi serve l'equazione d'onda dei raggi dell'ottica geometrica nel caso di  $\omega$  costante: sappiamo che per il campo elettrico vale l'equazione d'onda di Maxwell

$$\left( -\frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) E(\vec{x}, t) = 0$$

E se la pulsazione è costante

$$E(\vec{x}, t) = E(\vec{x})e^{i\omega t}$$

Derivando rispetto al tempo e sostituendo troviamo allora l'**equazione di Helmholtz**

$$\left(-\frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) E(\vec{x}, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\omega^2}{v_f^2} + \nabla^2\right) E(\vec{x}) = 0$$

Per l'analogia stabilita da Schrödinger possiamo riscrivere l'equazione

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})\right) \Psi(\vec{x}) = \mathcal{E} \Psi(\vec{x}) \quad (9.6)$$

che è nota come **equazione di Schrödinger stazionaria**, poiché la  $\Psi$  non dipende dal tempo. La funzione  $\Psi$  è qualcosa che dipende dall'atomo, bisogna trovare un'interpretazione. Schrödinger risolse l'equazione per l'atomo di idrogeno, utilizzando il potenziale coulombiano e impone che la  $\Psi$  trovata appartenga a  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . In questo modo trova una soluzione se e solo se  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$  di Bohr. Conclude allora che il ragionamento ha un senso e riesce a giustificare quindi la struttura discreta delle energie di Bohr, ossia il secondo postulato.

Ora, sappiamo che per il campo elettrico vale in generale la relazione (data dalla trasformata di Fourier)

$$E(\vec{x}, t) = \int E_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} d\omega$$

Analogamente varrà anche per la  $\Psi$

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int \Psi_{\mathcal{E}}(\vec{x}) e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} t} d\mathcal{E}$$

Ora però  $\Psi_{\mathcal{E}}$  non dipende dal tempo dunque deve soddisfare l'equazione di Schrödinger stazionaria. Dunque se moltiplichiamo a destra e a sinistra per

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})\right)$$

otteniamo

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})\right) \Psi(\vec{x}, t) = \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})\right) \Psi_{\mathcal{E}}(\vec{x}) e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} t} d\mathcal{E} = \int \mathcal{E} \Psi_{\mathcal{E}}(\vec{x}) e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} t} d\mathcal{E}$$

A questo punto riscriviamo l'integrale a secondo membro

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})\right) \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int \Psi_{\mathcal{E}}(\vec{x}) e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} t} d\mathcal{E}$$

E dunque riconosciamo nel secondo membro la funzione  $\Psi(\vec{x}, t)$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})\right) \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (9.7)$$

che è l'equazione di Schrödinger nel caso in cui la  $\Psi$  dipenda dal tempo, ossia quella che descrive l'evoluzione temporale della funzione d'onda. Notiamo subito che, il fatto che compaia la  $i$  ci dice che la  $\Psi$  deve essere complessa, quindi si ritrova lo stesso risultato ottenuto da Heisenberg, ossia che l'algebra è sui complessi.

Nel 1926 Schrödinger nota che può riscrivere l'equazione 9.6 utilizzando l'hamiltoniana del sistema (conservativo) e avendo cura di sostituire  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$

$$\hat{H}(\vec{x}, -i\hbar\nabla) = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(x)$$

dunque l'equazione si riscrive

$$\hat{H}\Psi(\vec{x}) = \mathcal{E}\Psi(\vec{x}) \quad (9.8)$$

$\hat{H}$  è un operatore, dunque strutturalmente è una matrice. Invece  $\Psi$  è un vettore, e giustamente il prodotto deve dare un vettore.  $\mathcal{E}$  invece è un numero per lo stesso vettore, dunque abbiamo trovato un'equazione agli autovalori. Abbiamo scoperto che le energie possibili non sono altro che gli **autovalori** dell'operatore energia.

Il fatto vale in generale, e in effetti per estrarre i valori delle osservabili che io effettivamente misuro con un esperimento, bisogna risolvere la rispettiva equazione agli autovalori utilizzando la funzione  $\Psi$ . Questo giustifica anche il fatto che il risultato è una misura, non di certo un operatore.

Si definiscono a questo punto due operatori

$$\hat{x}\Psi(x) = x\Psi(x) \quad \hat{x} \text{ operatore posizione}$$

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar\frac{d\Psi(x)}{dx} \quad \hat{p} \text{ operatore momento}$$

Calcoliamo la commutazione dei due operatori, che è ancora un operatore, dunque per capire com'è fatto dobbiamo applicarlo a una funzione

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}]\Psi(x) &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\Psi(x) = -x\left(i\hbar\frac{d\Psi(x)}{dx}\right) - \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)(x\Psi(x)) \\ &= -x\left(i\hbar\frac{d\Psi(x)}{dx}\right) + i\hbar\Psi(x) + i\hbar x\frac{d\Psi(x)}{dx} \\ &= i\hbar\Psi(x) \end{aligned}$$

Dunque abbiamo che

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Questo vuol dire che gli operatori posizione e momento hanno la stessa algebra di  $q_{mn}$  e  $p_{mn}$ . Si hanno le seguenti relazioni

$$q_{mn}(t) = \int \Psi_m^*(x, t)x\Psi_n(x, t)dx \quad (9.9)$$

$$p_{mn} = \int \Psi_m^*(x, t)\left(-i\hbar\frac{\partial\Psi_n(x, t)}{\partial x}\right)dx \quad (9.10)$$

$$H_{mn}(t) = \int \Psi_m^*(x, t) \hat{H} \Psi_n(x, t) dx \quad (9.11)$$

Da questo deduciamo che le matrici di Heisemberg agiscono sullo spazio delle funzioni d'onda di Schrödinger, ossia uno spazio normato con la norma di  $L_2(\mathbb{R}^3)$ .

Se consideriamo una  $\Psi_n$  che soddisfa l'equazione stazionaria, essa deve soddisfare anche quella evoluta. Allora

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = \hat{H} \Psi_n = \mathcal{E}_n \Psi_n$$

Se ci focalizziamo sul primo e ultimo membro, riconosciamo un'equazione a variabili separabili di cui conosciamo la soluzione

$$\Psi_n(\vec{x}, t) = \Psi_n(\vec{x}, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_n t}$$

Che è una funzione periodica di pulsazione  $\omega$  costante, dunque lo è anche l'energia. Questo ci dice che se una  $\Psi_n$  soddisfa l'equazione stazionaria, allora l'elettrone non irradia e conserva la sua energia e dunque l'atomo è stabile.

Consideriamo nuovamente la 9.11 e svolgiamo i calcoli, tenendo conto che la  $\Psi(x, t)$  soddisfa la equazione stazionaria, per esempio un oscillatore armonico

$$H_{mn} = \int \Psi_m^*(x, t) \hat{H} \Psi_n(x, t) dx = \int \Psi_m^*(x, t) \mathcal{E}_n \Psi_n(x, t) dx = \mathcal{E}_n \int \Psi_m^*(x, t) \Psi_n(x, t) dx$$

Ora nello spazio delle funzioni d'onda, le  $\Psi_n$  sono una base, dunque il prodotto scalare tra due elementi della base è  $\delta_{mn}$ , che è proprio l'ultimo integrale se consideriamo il prodotto scalare definito su  $L_2(\mathbb{R}^3)$ . Dunque ritroviamo

$$H_{mn} = \mathcal{E}_n \delta_{mn}$$

che giustifica l'ipotesi fatta da Heisemberg. Inoltre se deriviamo rispetto al tempo  $q_{mn}$

$$\dot{q}_{mn} = \int \frac{\partial \Psi_m^*}{\partial t} x \Psi_n dx + \int \Psi_m^* x \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \mathcal{E}_m \int \Psi_m^*(x, t) x \Psi_n(x, t) + \frac{1}{i\hbar} \mathcal{E}_n \int \Psi_m^*(x, t) x \Psi_n(x, t)$$

ove il meno davanti al primo integrale deriva dal fatto che abbiamo considerato la coniugata dell'equazione 9.7. Allora

$$\dot{q}_{mn} = \frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{i\hbar} q_{mn} = \frac{[q, H]_{mn}}{i\hbar}$$

Quindi anche Schrödinger ottiene lo stesso risultato di Heisemberg. I due modi di procedere dunque sono totalmente analoghi, sia la meccanica matriciale di Heisemberg che quella ondulatoria di Schrödinger. Rimane il problema dell'interpretazione da assumere per la funzione  $\Psi$ , che finora è venuta fuori soltanto come analogo del campo elettrico nel caso dell'ottica fisica. Per ora sappiamo soltanto che sono funzioni complesse, che nel caso in cui le energie  $\mathcal{E}_n$  sono minori di 0 assumono delle forme strane, nulla a che vedere con le orbite di Bohr (**orbitali**).

Born nel 1926 propone invece di studiare il caso con  $\mathcal{E}_n > 0$  che dovrebbe corrispondere al caso delle orbite aperte. Per queste conosciamo un'informazione sicura e verificata sperimentalmente, la sezione d'urto di Rutherford. Quest'ultima è indipendente dal numero di particelle, difatti dipende soltanto dall'angolo. Dunque se mando una o cento particelle

è la stessa cosa. Spariamo quindi una sola particella che abbia equazione di Schrödinger  $\Psi$ , e il risultato non può dipendere dal fatto che ne abbiamo mandato soltanto una.

Ricordiamo che la sezione d'urto è il rapporto tra due flussi, e dunque vorremmo trovare qualcosa che assomigli a un flusso (corrente) e che dipenda dalla  $\Psi$ . Consideriamo ora l'equazione di Schrödinger e la sua coniugata

$$\begin{cases} \hat{H}\Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ \left(\hat{H}\Psi\right)^*(\vec{x}, t) = -i\hbar \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \end{cases}$$

Ora se moltiplichiamo (a destra<sup>12</sup>) la prima per  $\Psi^*$ , la seconda per  $\Psi$  e facciamo la differenza membro a membro

$$\begin{aligned} \Psi^* \hat{H} \Psi + \Psi \left(\hat{H} \Psi\right)^* &= i\hbar \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \\ \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \Psi - \Psi \left( \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \Psi \right)^* &= i\hbar \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} \\ \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \Psi - \Psi \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \Psi^* &= \\ \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \Psi - \Psi \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \Psi^* &= \\ -\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi^* \nabla \cdot \nabla \Psi - (\nabla \cdot \nabla \Psi^*) \Psi) &= \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \nabla \Psi^* \Psi) &= \end{aligned}$$

Se ora definiamo la densità  $\rho(\vec{x}, t)$

$$\rho(\vec{x}, t) = |\Psi|^2$$

e la corrente

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \nabla \Psi^* \Psi)$$

Abbiamo un'equazione formalmente identica alla equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Questo ci dice che siamo sulla buona strada, perché ci indica che  $\vec{j}$  è proprio una corrente, un flusso o come la si voglia chiamare.

Ora, il fascio incidente lo possiamo descrivere con una funzione d'onda  $\Psi_i$  che si propaga lungo un asse, chiamiamolo  $\hat{z}$ , che assumiamo come onda piana, dunque sarà

$$\Psi = e^{ikz}$$

invece l'onda per la particella diffusa sarà  $\Psi_d$ , che si propaga in una direzione che chiamiamo  $\hat{x}$  inclinata di un certo angolo rispetto a  $\hat{z}$ . Se assumiamo di trovarci a grande

<sup>12</sup>È necessario specificarlo perché andiamo a moltiplicare un operatore, dunque una matrice, e se non commuta non è la stessa cosa che moltiplicare a sinistra.



distanza dal nucleo, la perturbazione subita dal fascio è piccola, come è piccolo anche il potenziale coulombiano, e in particolare  $\Psi_d \ll \Psi_i$ , così da poter trascurare i termini quadratici. Nell'intervallo in cui la particella interagisce con il nucleo, la funzione d'onda  $\Psi$  che descrive la particella sarà la somma delle due

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_d$$

L'energia del flusso si conserva, dunque scriviamo l'equazione stazionaria di Schrödinger stazionaria

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) (e^{ikz} + \Psi_d(\vec{x})) = \mathcal{E} (e^{ikz} + \Psi_d(\vec{x}))$$

Inoltre notiamo che

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 e^{ikz} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} e^{ikz} \text{ de Broglie } \mathcal{E} e^{ikz}$$

Per le assunzioni fatte possiamo inoltre trascurare il prodotto  $V(\vec{x})\Psi_d(\vec{x})$ . Allora possiamo scrivere

$$V(\vec{x})e^{ikz} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_d(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi_d(\vec{x})$$

E dunque possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi_d = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{x}) e^{ikz}$$

Assumiamo che un'equazione alle derivate parziali della forma

$$(\nabla^2 + k^2) f(x) = g(x)$$

abbia soluzione

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} g(\vec{y})$$

Allora

$$\Psi_d(\vec{x}) = \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} V(\vec{x}') e^{ikz'}$$

Scriviamo  $z' = \hat{z} \cdot \vec{x}'$  e assumiamo che  $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ . Questo è lecito perché la coordinata  $x'$  è legata al potenziale, che è non trascurabile solo per piccoli  $\vec{x}'$ , e invece a noi interessa l'andamento a grandi  $\vec{x}$ . Dunque

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{x}'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'} = |\vec{x}| \sqrt{1 + \frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2}}$$

A questo punto possiamo approssimare  $\vec{x}'^2/\vec{x}^2 \rightarrow 0$  e sviluppare il resto in serie di Taylor, chiamando  $y = \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2}$

$$\sqrt{1 - 2y} \simeq 1 - y$$

Dunque

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \simeq |\vec{x}| \left( 1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right) = |\vec{x}| - \hat{x} \cdot \vec{x}' = r - \hat{x} \cdot \vec{x}'$$

Adesso approssimiamo nell'integrale, ma a denominatore leviamo anche il termine  $\hat{x} \cdot x'$ , tanto è piccolo. Nell'esponenziale non lo togliamo poiché una variazione dell'esponenziale è più importante

$$\Psi_d \simeq \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3x' V(\vec{x}') e^{ik(r-\hat{x}\cdot\vec{x}')} \frac{1}{r} e^{ik\hat{z}\cdot\vec{x}'} = \frac{2m}{4\pi r\hbar^2} e^{ikr} \int d^3x' V(\vec{x}') e^{ik(\hat{z}-\hat{x})\cdot\vec{x}'}$$

A questo punto scriviamo il potenziale coulombiano nella sua forma solita

$$\Psi_d = \frac{2m}{4\pi r\hbar^2} e^{ikr} \int d^3x' \frac{2Ze^2}{r'} e^{ik(\hat{z}-\hat{x})\cdot\vec{x}'} = \frac{2m2Ze^2}{4\pi r\hbar^2} e^{ikr} \int d^3x' \frac{1}{r'} e^{ik(\hat{z}-\hat{x})\cdot\vec{x}'}$$

Siano ora  $\alpha, \beta, r'$  le coordinate polari con asse  $\hat{x} - \hat{z}$ . Allora l'integrale in queste coordinate<sup>13</sup> è

$$\begin{aligned} \Psi_d &= \frac{2m2Ze^2}{4\pi r\hbar^2} e^{ikr} \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\alpha \sin\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \frac{1}{r'} e^{ik|\hat{z}-\hat{x}|r' \cos\alpha} \\ &= \frac{4mZe^2}{4\pi r\hbar^2} e^{ikr} \pi \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\alpha \sin\alpha r' e^{ik|\hat{z}-\hat{x}|r' \cos\alpha} \\ &= \frac{2mZe^2}{r\hbar^2} e^{ikr} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\alpha \sin\alpha r' e^{ik|\hat{z}-\hat{x}|r' \cos\alpha} \\ &= \frac{2mZe^2}{r\hbar^2} e^{ikr} \int_0^\infty dr' \int_{-1}^1 d(\cos\alpha) r' e^{ik|\hat{z}-\hat{x}|r' \cos\alpha} \\ &= \frac{2mZe^2}{r\hbar^2} e^{ikr} \int_0^\infty dr' r' \frac{e^{ik|\hat{z}-\hat{x}|r'} - e^{-ik|\hat{z}-\hat{x}|r'}}{ik|\hat{z}-\hat{x}|r'} \\ &= \frac{4mZe^2}{r\hbar^2} e^{ikr} \frac{1}{k|\hat{z}-\hat{x}|} \int_0^\infty dr' r \sin(k|\hat{z}-\hat{x}|r') = \frac{4mZe^2}{r\hbar^2} e^{ikr} \frac{1}{k^2|\hat{z}-\hat{x}|^2} \\ &= \frac{2Ze^2}{r\mathcal{E}|\hat{z}-\hat{x}|^2} \end{aligned}$$

Ora, calcoliamo il modulo del fattore a denominatore, tenendo presente che  $\hat{z}$  e  $\hat{x}$  sono versori, il primo della direzione dell'onda incidente, il secondo di quella diffusa. Il prodotto scalare quindi da il coseno dell'angolo di diffusione

$$|\hat{z} - \hat{x}|^2 = \hat{z}^2 + \hat{x}^2 - 2\hat{z} \cdot \hat{x} = 2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Dunque l'onda diffusa è

$$\Psi_d(\vec{x}) = \frac{Ze^2}{2r\mathcal{E} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)$$

Ora per calcolare la sezione d'urto notiamo che, utilizzando la formula per la corrente trovata in precedenza, utilizzando  $e^{ikr}$  troviamo il flusso dell'onda incidente, utilizzando  $\Psi_d$  il flusso dell'onda diffusa. Dunque

$$\sigma(\theta) = r^2 \frac{\vec{j}_{diffusa}}{\vec{j}_{incidente}} = r^2 \frac{\Psi_d^* \nabla \Psi_d - \nabla \Psi_d^* \Psi_d}{\Psi_i^* \nabla \Psi_i - \nabla \Psi_i^* \Psi_i}$$

<sup>13</sup>Ora l'ultimo integrale è ovvio che non da uno. Ma probabilmente a lezione Marchetti ha tralasciato qualche dettaglio che lo fa essere unitario.

dove  $r^2$  serve perché la corrente incidente sia per unità di area.

$$\nabla \Psi_d = \frac{\partial}{\partial r} \Psi_d = \frac{ikr e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2} f(\theta) = \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) = \left( ik - \frac{1}{r} \right) \Psi_d$$

Analogamente

$$\nabla \Psi_d^* = \frac{\partial}{\partial r} \Psi_d^* = \left( -ik - \frac{1}{r} \right) \Psi_d^*$$

Invece

$$\nabla \Psi_i = \frac{\partial}{\partial z} e^{ikz} = ik e^{ikz} = ik \Psi_i$$

e

$$\nabla \Psi_i = \frac{\partial}{\partial z} e^{-ikz} = -ik e^{-ikz} = -ik \Psi_i^*$$

Mettendo insieme i pezzi

$$\sigma(\theta) = r^2 \frac{\Psi_d^* \left( ik - \frac{1}{r} \right) \Psi_d - \left( -ik - \frac{1}{r} \right) \Psi_d^* \Psi_d}{\Psi_i^* ik \Psi_i - -ik \Psi_i^* \Psi_i} = r^2 \frac{|\Psi_d|}{|\Psi_i|} = r^2 \frac{f^2(\theta)}{1}$$

E finalmente

$$\sigma(\theta) = f^2(\theta) = \frac{Z^2 e^4}{4r^2 \mathcal{E}^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

che è esattamente la formula trovata da Rutherford per via sperimentale. Questo ci dice che l'interpretazione da dare alla corrente definita sopra è quella di flusso di particelle diffuse in un certo  $d\theta$ , che non è altro che un flusso di probabilità. Questo ci dice che la  $\rho$ , e dunque il **modulo quadro della funzione d'onda** è una densità di probabilità.

Affinché possa essere interpretata come densità di probabilità, la  $\rho(\vec{x}, t)$  deve essere normalizzata e definita positiva. Sulla seconda condizione siamo già soddisfatti, visto che c'è il modulo quadro. Bisogna verificare che

$$\int d^3x \rho(\vec{x}, t) = 1$$

Dall'equazione di continuità che abbiamo scritto

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}$$

E integrando ambo i membri

$$\frac{d}{dt} \int d^3x |\Psi|^2 = - \int \nabla \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \int \vec{j} d\Sigma$$

Ora ha senso assumere che l'ultimo integrale sia nullo poiché vuol dire che, essendo il flusso di probabilità nullo su una superficie sferica di raggio infinito, c'è una probabilità di trovare la particella all'infinito è nulla. Allora l'integrale

$$\frac{d}{dt} \int d^3x |\Psi|^2 = 0$$

E in particolare è costante nel tempo, dunque ha senso chiamarlo<sup>14</sup>  $\|\Psi\|^2$ . Allora la densità di probabilità normalizzata è

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{|\Psi(\vec{x}, t)|^2}{\|\Psi\|^2}$$

### 9.3.3 Valori medi delle osservabili

In questo paragrafo indicherò i vettori senza la freccia sopra, semplicemente per comodità di scrittura e lettura, ma sarà chiaro che sono vettori. Inoltre utilizzo lo stesso simbolo per indicare operatori e trasformate di Fourier, ma nel secondo caso lo utilizzerò solamente su funzioni. Data una osservabile tale che  $f(\hat{x})\Psi(x) = f(x)\Psi(x)$ , il valor medio si calcola

$$\langle f(\hat{x}) \rangle_\Psi = \int d^3x f(x) \frac{|\Psi(x)|^2}{\|\Psi\|^2} = \int d^3x \frac{\Psi^*(x) f(x) \Psi(x)}{\|\Psi\|^2}$$

ad esempio il valor medio della posizione è

$$\langle \hat{x} \rangle_\Psi = \int d^3x x \frac{|\Psi(x)|^2}{\|\Psi\|^2} = \int d^3x \frac{\Psi^*(x) x \Psi(x)}{\|\Psi\|^2}$$

mentre il valor medio del momento è

$$\langle \hat{p} \rangle_\Psi = \int d^3x \frac{\Psi^* (-i\hbar \nabla \cdot \Psi)}{\|\Psi\|^2}$$

Per Fourier inoltre possiamo scrivere

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k \hat{\Psi}(k) e^{ik \cdot x} \quad \text{de Broglie } k=p/\hbar \quad \frac{1}{\hbar^3 \sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3p \hat{\Psi}(p) e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

Applicando l'operatore momento a  $\Psi$

$$\hat{p}\Psi = -i\hbar \frac{d}{dx} \frac{1}{\hbar^3 \sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3p \hat{\Psi}(p) e^{i\frac{p}{\hbar}x} = \frac{1}{\hbar^3 \sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3p p \hat{\Psi}(p) e^{i\frac{p}{\hbar}x} = p \hat{\Psi}$$

Dunque abbiamo trovato che

$$\mathcal{F} \left[ -i\hbar \frac{d\Psi(x)}{dx} \right] = p \hat{\Psi}(p)$$

Utilizziamo ora la proprietà della trasformata di Fourier di essere un operatore isometrico

$$\int \Psi^* \varphi d^3x = \int \hat{\Psi}^* \hat{\varphi} d^3x$$

Innanzitutto applichiamo la proprietà alla norma

$$\|\Psi\|^2 = \int d^3x \Psi^* \Psi = \int d^3p \hat{\Psi}^* \hat{\Psi} = \|\hat{\Psi}\|^2$$

<sup>14</sup>Ricordo che Schrödinger aveva imposto proprio che questo integrale fosse finito, dunque non ci sono problemi di convergenza. Questo sta ora a significare che più lontano siamo dal pacchetto d'onda meno è probabile che troviamo la particella, che è proprio quello che volevamo.

Allora il valor medio di  $\hat{p}$  si può riscrivere

$$\langle \hat{p} \rangle_{\Psi} = \int d^3p \frac{\hat{\Psi}(p)p\hat{\Psi}}{\|\hat{\Psi}(p)\|^2}$$

In generale vale la seguente regola per un'osservabile  $f(\hat{x}, \hat{p})$

$$\langle f(\hat{x}, \hat{p}) \rangle_{\Psi} = \int d^3x \frac{\Psi^*(x)f(\hat{x}, \hat{p})\Psi(x)}{\|\Psi\|^2} \quad (9.12)$$

Ma allora, se a partire dalla  $\Psi$  posso calcolare i valori medi di  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  e delle loro funzioni,  $\Psi$  deve descrivere lo stato del sistema. In particolare però, siccome  $\Psi(x)$  dipende soltanto dalle coordinate spaziali, ciò vuol dire che anche il valor medio di  $\hat{p}$  dipende soltanto da queste. É come dire che il momento non può assumere tutti i valori in ogni punto dello spazio, ma classicamente sappiamo che le posizioni e i momenti sono indipendenti, e determinano la traiettoria della particella.

Nella camera a bolle vediamo indistintamente la traiettoria delle particelle, dunque abbiamo sempre dato per scontato che esse abbiano una traiettoria. Ma cosa vediamo veramente? In realtà se zoomiamo sulla traiettoria vediamo una successione di gocce, apparentemente concentrate sulla traiettoria. Ma quest'ultima non è esattamente determinata.

Ci chiediamo allora come può essere una traiettoria se la posizione è descritta dalla probabilità governata dalla funzione d'onda. Allora costruiamo un pacchetto d'onde concentrato sulla traiettoria

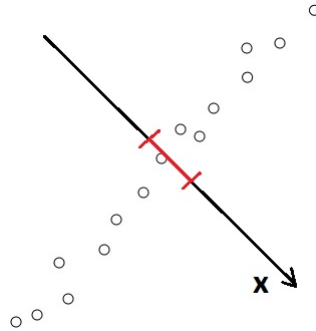


Figura 9.9: Ad esempio vogliamo un pacchetto largo come il segmento rosso. Chiamiamo la direzione  $x$  come quella in cui le bolle si estendono in larghezza.

Consideriamo ad esempio una gaussiana

$$\Psi(x) = e^{\frac{-x^2}{2\sigma}}$$

Posso alternativamente descrivere il pacchetto d'onde in serie di Fourier, in pratica sommando un numero infinito di onde monocromatiche

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\Psi}(k)e^{ikx} dk$$

Siccome la trasformata e l'antitrasformata sono uno l'operatore inverso dell'altro

$$\hat{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{\frac{-x^2}{2\sigma}} e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{\frac{x^2 + 2\sigma ikx}{-2\sigma}}$$

Completiamo il quadrato

$$(x + ik\sigma)^2 = x^2 + 2ikx\sigma - k^2\sigma^2$$

$$\hat{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-\frac{(x+ik\sigma)^2}{2\sigma}} e^{-\frac{k^2\sigma}{2}} = \frac{e^{-\frac{k^2\sigma}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} = ce^{-\frac{k^2\sigma}{2}}$$

Dunque se il pacchetto d'onde nelle posizioni è una gaussiana di indeterminazione  $\sigma$ , nella variabile coniugata (vettore d'onda, o momento se si utilizza la relazione di de Broglie) è una gaussiana di indeterminazione  $\frac{1}{\sigma}$ . Dunque se vogliamo focalizzarci sulle posizioni diminuendo  $\sigma$ , allora perdiamo precisione nel momento. Possiamo scrivere

$$\sigma = (\Delta x)^2 \quad \frac{1}{\sigma} = (\Delta k)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x \Delta k = 1$$

Per una distribuzione generica si dimostra che vale il maggiore uguale

$$\Delta x \Delta k \geq 1$$

E utilizzando la relazione di de Broglie  $p = k/\hbar$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

Se volessimo quindi migliorare la precisione della  $x$ , bisogna per forza aumentare quella del momento poiché il prodotto deve essere maggiore di  $\hbar$ . In ogni caso non si riesce a stabilire una traiettoria, poiché è necessario che si conosca con esattezza posizione e momento<sup>15</sup>.

L'indeterminazione è talmente controintuitiva che c'è chi ha provato a smentirlo con il seguente esperimento ideale: supponiamo di avere un'onda elettromagnetica piana che si propaga in una direzione, diciamo  $\hat{y}$ . A un certo punto l'onda incontra una fenditura, e quindi viene diffratta. Consideriamo la direzione  $\hat{x}$  perpendicolare a  $\hat{y}$ , e la fenditura evidentemente è estesa in lunghezza in direzione  $\hat{x}$ , supponiamo che sia larga  $\Delta x$ . Sappiamo che l'onda piana si propaga in  $\hat{y}$ , dunque conosciamo con il momento in direzione  $x$ , ossia nullo. Quando passa per la fenditura inoltre conosciamo la posizione, perché deve passare per la fenditura, con indeterminazione al massimo  $\Delta x$  che possiamo rendere piccola a piacere. Dunque avremmo trovato

$$\Delta p_x \Delta x \sim 0$$

che è evidentemente contro il risultato che abbiamo appena visto. L'errore però sta nel fatto che non conosciamo con esattezza posizione e momento **simultaneamente**. Infatti prima di incontrare la fenditura non abbiamo modo di conoscere la posizione. Quando l'onda attraversa la fenditura e anche dopo, conosciamo la posizione con una buona precisione  $\Delta x$ , ma ora non conosciamo più con esattezza il momento in direzione  $\hat{x}$ , poiché è diverso da 0 ora a causa del fenomeno della diffrazione. Sappiamo, dall'ottica fisica, che il primo minimo di diffrazione è

$$\sin \alpha \simeq \frac{\lambda}{\Delta x}$$

---

<sup>15</sup>In pratica punto nello spazio e la sua derivata, per vedere in che verso è percorsa.

È ragionevole supporre che la particella sia all'interno della prima "campana" di diffrazione poiché qui ci sta l'80% dell'intensità (o area della figura di diffrazione) totale dell'onda. Allora siccome il momento si deve conservare,  $\Delta p_x = p \sin \alpha$ . Utilizzando inoltre  $\lambda = h/p$

$$\frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{h}{p \Delta x} \Rightarrow \Delta p_x \Delta x \simeq h$$

dunque in realtà non siamo caduti in contraddizione.

Il principio su cui stiamo facendo peso è il cosiddetto **principio di indeterminazione di Heisenberg**: *è impossibile determinare simultaneamente le posizioni e il momento di una particella quantistica con un prodotto delle indeterminazioni maggiore di  $\hbar/2$* . Vediamo ora come si arriva a migliorare la stima fatta precedentemente. Per definizione di fluttuazione quadratica media

$$(\Delta \hat{x})_\Psi = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle_\Psi - \langle \hat{x} \rangle_\Psi^2}$$

$$(\Delta \hat{p})_\Psi = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle_\Psi - \langle \hat{p} \rangle_\Psi^2}$$

Per semplicità, assumiamo che la media della posizione e del momento sia zero, e inoltre che  $\|\Psi\| = 1$ . Il fatto che si assuma la norma finita ci porta a dire che all'infinito la funzione d'onda sia nulla.

$$(\Delta \hat{x})_\Psi^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle_\Psi = -\hbar^2 \int dx x^2 |\Psi|^2$$

$$(\Delta \hat{p})_\Psi^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle_\Psi = -\hbar^2 \int dx \Psi^*(x) \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2}$$

Integrando per parti la fluttuazione del momento

$$(\Delta \hat{p})_\Psi^2 = -\hbar^2 \int dx \frac{d}{dx} \left[ \Psi^*(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} \right] + \hbar^2 \int dx \left| \frac{d\Psi(x)}{dx} \right|^2$$

Ora, il primo integrale è nullo perché la primitiva è proporzionale a  $\Psi^*$  che è nulla agli estremi (infiniti). Il secondo integrale invece sfrutta il fatto che derivata e coniugazione commutano, dunque si ha il modulo quadro della derivata.

$$(\Delta \hat{p})_\Psi^2 = \hbar^2 \int dx \left| \frac{d\Psi(x)}{dx} \right|^2$$

Ora consideriamo la seguente quantità, che è sicuramente maggiore di zero

$$\left| \frac{x}{2(\Delta x)^2} \Psi(x) + \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 \geq 0$$

svolgendo il quadrato

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 |\Psi|^2}{4(\Delta x)^4} + \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 + \frac{x}{2(\Delta x)^2} \left( \Psi^* \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi^*}{dx} \Psi \right) \\ &= \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 + \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{2(\Delta x)^2} \Psi^* \Psi \right) - \frac{|\Psi|^2}{2(\Delta x)^2} + \frac{x^2 |\Psi|^2}{4(\Delta x)^4} \geq 0 \end{aligned}$$

Siccome l'ultimo membro è maggiore di zero, anche il suo integrale lo sarà. Il secondo termine ha integrale nullo, perché la primitiva è proporzionale a  $\Psi$ , che si annulla all'infinito. Allora

$$\int \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 - \frac{|\Psi|^2}{2(\Delta x)^2} + \frac{x^2 |\Psi|^2}{4(\Delta x)^4} dx = \int \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 dx - \frac{1}{2(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{4(\Delta x)^4}$$

perché se integro il modulo quadro, ottengo la norma al quadrato che è unitaria. Mentre l'ultimo addendo è la definizione della fluttuazione della posizione. Continuando a svolgere i calcoli

$$\int \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 dx - \frac{1}{4(\Delta x)^2} = \frac{(\Delta p)^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \geq 0$$

e dunque troviamo

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\Delta \hat{x})_\Psi (\Delta \hat{p})_\Psi \geq \frac{\hbar}{2}}$$

che è proprio la disuguaglianza del principio di indeterminazione. In generale vale però

$$(\Delta \hat{f})_\Psi (\Delta \hat{g})_\Psi \geq \left| \frac{\langle [\hat{f}, \hat{g}] \rangle}{2i} \right| \quad (9.13)$$

E sapendo che  $\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle = i\hbar$  ritroviamo proprio quello che è risultato dai conti.

Il commutatore ci dice che l'ordine con cui faccio le misurazioni delle osservabili non è lo stesso, anche nel limite infinitesimo di simultaneità. In pratica quando misuro un'osservabile, "disturbo" la misura successiva di un'altra osservabile, e se inverto l'ordine posso ottenere risultati diversi. Di più la relazione di Heisenberg ci dice che il tentativo di arrivare a definire in modo esatto posizione e momento è impossibile, poiché abbiamo il limite di  $\hbar/2$ . Dunque in meccanica quantistica non esistono gli autostati, come in meccanica classica. Lo stato puro non è più definito come la conoscenza di momento e posizione iniziale, ma bensì non possiamo conoscere più della funzione  $\Psi(x)$ . L'indeterminazione è intrinseca, non derivata da mancanza di informazione o mancanza di "bravura" nel misurare, deriva dalla natura degli operatori posizione e momento, si può dimostrare a partire dal commutatore, ossia da principi primi. Inoltre è una conferma dell'intuizione di Planck circa lo spazio delle fasi quantizzato: in effetti non possiamo andare ad aree di ordine minore di  $h$ .

Riprendiamo la definizione 9.12. Consideriamo lo stato  $\alpha\Psi$  con  $\alpha$  costante complessa.

$$\langle f(\hat{x}, \hat{p}) \rangle_{\alpha\Psi} = \frac{\int \alpha^* \Psi^* f \alpha \Psi}{|\alpha|^2 \|\Psi\|^2} = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2} \langle f(\hat{x}, \hat{p}) \rangle_\Psi = \langle f(\hat{x}, \hat{p}) \rangle_\Psi$$

Quindi uno stato puro in meccanica quantistica è caratterizzato dalla funzione d'onda, a meno di una costante. Questo ci dice che l'ampiezza di  $\Psi$  è arbitraria, perciò è lecito imporla unitaria, poiché abbiamo visto che non varia il valor medio. Se vediamo la funzione d'onda come un vettore di  $L_2$  possiamo dire che quel che conta soltanto la "direzione".



In soldoni abbiamo visto che le assunzioni implicitamente fatte in meccanica classica, come il fatto che le osservabili obbediscano a un'algebra commutativa sui reali, oppure che lo spettro di un osservabile è continuo, le quali non discendono da principi primi, sono in realtà "errate" se si va a guardare a scale di grandezza paragonabili a quelle atomiche. L'unica concezione che si è salvata, e non modificata, è che tutto può essere descritto con posizione e momento, che però sono diventati degli operatori. Questo ci consente di parlare di **particelle quantistiche**, che però sono descritte dalla funzione d'onda  $\Psi$ .

## 9.4 Esempi

### 9.4.1 Particella in scatola unidimensionale

Assumiamo di avere una scatola  $[0, a]$  unidimensionale in cui è contenuta una particella carica di massa  $m$ . Sappiamo che essa non può andare fuori, dunque possiamo immaginare che il potenziale sia il seguente

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, a) \\ \infty & \text{altrove} \end{cases}$$

ci interessa sapere quali energie mi aspetto di trovare se effettuo delle misurazioni sulla particella. Scriviamo l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}\Psi_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\Psi_{\mathcal{E}}$$

Sappiamo che la particella non può trovarsi fuori, dunque  $\Psi_{\mathcal{E}} = 0$  fuori dalla scatola, e per continuità dovrà esserlo in entrambi gli estremi

$$\Psi_{\mathcal{E}}(0) = \Psi_{\mathcal{E}}(a) = 0$$

Il potenziale dentro è nullo, dunque l'equazione all'interno della scatola

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_{\mathcal{E}} = -k^2\Psi_{\mathcal{E}}$$

definendo  $k^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$ . Vediamo che è un'equazione conosciuta, che ha soluzione del tipo

$$\Psi_{\mathcal{E}} = A \sin(kx + \alpha)$$

se assumiamo che  $\Psi_{\mathcal{E}}(0) = 0$  troviamo  $\alpha = 0$ . Se invece imponiamo  $\Psi_{\mathcal{E}}(a) = 0$

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

Il che implica che le energia possibili sono

$$\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} = n^2 \frac{\pi^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Il caso  $n = 0$  notiamo che corrisponde al caso in cui la particella non c'è, poiché la funzione d'onda sarebbe nulla anche nella scatola. Dunque  $n \in \mathbb{N} - 0$ . Ci possiamo inoltre chiedere

quale sia la probabilità, data l'energia, che la particella si trovi nel primo quarto della scatola, ossia in  $[0, \frac{a}{4}]$ . Conviene normalizzare la funzione d'onda cosicché abbia norma 1

$$\|\Psi\|^2 = \int_0^a |\Psi|^2 dx = |A|^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$$

Utilizzando formule trigonometriche

$$\|\Psi\|^2 = |A|^2 \int_0^a \frac{1 - \cos \frac{2\pi nx}{a}}{2} = |A|^2 \frac{a}{2} + |A|^2 \frac{a}{\pi n 2} \frac{\sin \frac{2\pi nx}{a}}{2} \Big|_0^a = |A|^2 \frac{a}{2} = 1$$

Il che porge  $A = \sqrt{2/a}$ . Quindi la funzione d'onda è

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Che se disegnate in un intervallo  $[0, a]$  è una serie di onde stazionarie con  $n$  pari al numero di ventri. La probabilità che ci interessa si calcola con lo stesso integrale appena svolto, poiché la densità di probabilità è, per  $\|\Psi\| = 1$

$$\rho(x) = |\Psi(x)|^2$$

Dunque

$$\Pr\left(\left[0, \frac{a}{4}\right]\right) = \int_0^{\frac{a}{4}} dx |\Psi|^2 = \frac{2}{a} \left[ \frac{x}{2} - \frac{a}{\pi n 2} \frac{\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{2} \right]_0^{\frac{a}{4}} = \frac{2}{a} \left[ \frac{a}{8} - a \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4\pi n} \right]$$

$$\Pr\left(\left[0, \frac{a}{4}\right]\right) = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^n}{2\pi n}$$

Anche ripetendo l'esperimento molte volte, se conosco l'energia, bisogna accontentarsi di conoscere la probabilità della posizione. Ci chiediamo a questo punto il valor medio del momento

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle_\Psi &= \int_0^a dx \Psi^* \left( -i\hbar \frac{d\Psi}{dx} \right) = -i\hbar \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left[ \frac{n\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right] \\ &= -i\hbar \frac{n\pi}{2a^2} \int_0^a dx \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) = 0 \end{aligned}$$

perché è integrato su un periodo. Questo era da aspettarsi perché il moto della particella non può che essere periodico, visto che è confinata in una buca di potenziale.

### 9.4.2 Particella in scatola tridimensionale

Stavolta ci troviamo in una buca di potenziale tridimensionale, di lati  $a_1, a_2, a_3$ , allora

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i \in (0, a_i) \text{ con } i = 1, 2, 3 \\ \infty & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora scrivendo l'equazione di Schrödinger nella scatola, ove il potenziale è nullo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Psi(\vec{x}) = \mathcal{E} \Psi(\vec{x})$$

Assumiamo, per semplicità, che la funzione d'onda possa essere scritta

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)\Psi_3(x_3)$$

Allora dividendo ambo i membri per la quantità  $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi(\vec{x})$  troviamo

$$\frac{\Psi_1''}{\Psi_1} + \frac{\Psi_2''}{\Psi_2} + \frac{\Psi_3''}{\Psi_3} = -\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$$

Ora, se supponiamo che  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$

$$\left[ \frac{\Psi_1''(x_1)}{\Psi_1(x_1)} + \frac{2m\mathcal{E}_1}{\hbar^2} \right] + \left[ \frac{\Psi_2''(x_2)}{\Psi_2(x_2)} + \frac{2m\mathcal{E}_2}{\hbar^2} \right] + \left[ \frac{\Psi_3''(x_3)}{\Psi_3(x_3)} + \frac{2m\mathcal{E}_3}{\hbar^2} \right] = 0$$

Ora le tre parentesi sono uguagliate a zero, ma ciascuna dipende da una variabile diversa. Dunque non possono altro che annullarsi tutte e tre simultaneamente, poiché sono scorrelate. Dunque abbiamo 3 equazioni come nel caso uni-dimensionale. Come avevamo scritto precedentemente poi, la soluzione è il prodotto delle soluzioni. Si impongono sempre le stesse condizioni di prima, trovando un risultato

$$\Psi_i(x_i) = \sqrt{\frac{2}{a_i}} \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right)$$

e l'energia è quantizzata

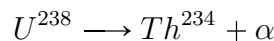
$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m} \left[ \frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right]$$

Dunque

$$\Psi(\vec{x}) = \sqrt{\frac{2}{a_1 a_2 a_3}} \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{a_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{a_2}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{a_3}\right)$$

### 9.4.3 Decadimenti ed effetto tunnel

Cerchiamo di spiegare ora il fenomeno del decadimento, che in fisica classica è incomprensibile. In sintesi avviene che, dopo un certo tempo un atomo decade in altre cose (altri atomi, ad esempio), senza nessun apparente motivo. Vedremo che questo è giustificato dalla natura ondulatoria della funzione d'onda  $\Psi$ . Analizziamo un caso pratico: il decadimento  $\alpha$  dell'uranio



Il tempo di vita medio dell'uranio, ossia dopo il quale l'uranio mediamente decade. Se la particella  $\alpha$  è "confinata" nell'uranio, vuol dire che ci deve essere un potenziale che le attrae, una buca di potenziale. Effettivamente le particelle sono soggette al potenziale in figura 9.10

Secondo la meccanica quantistica non possiamo sapere quando l'uranio decade e quale atomo di uranio è decaduto, ma possiamo conoscere la probabilità che esso avvenga.

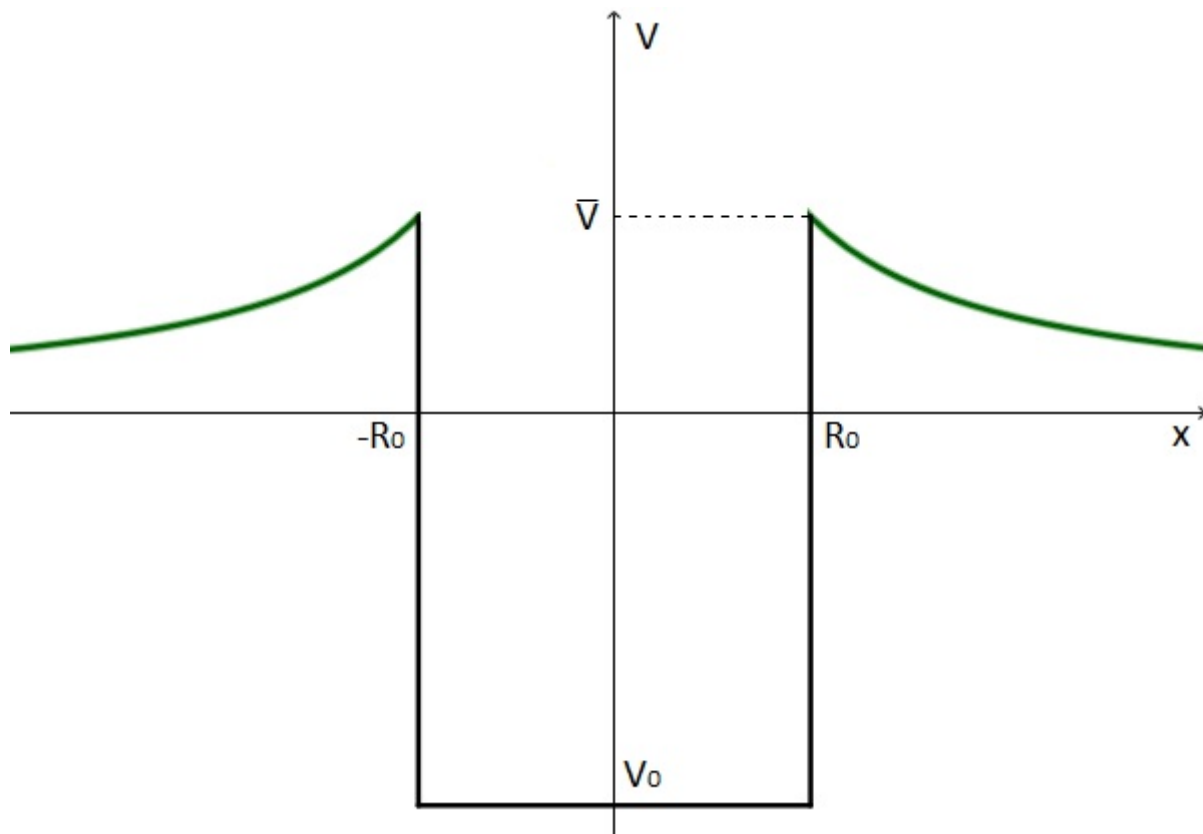


Figura 9.10: Potenziale a cui è soggetta la particella  $\alpha$  nell'uranio. Supponiamo che al di fuori della buca il potenziale sia di tipo coulombiano.

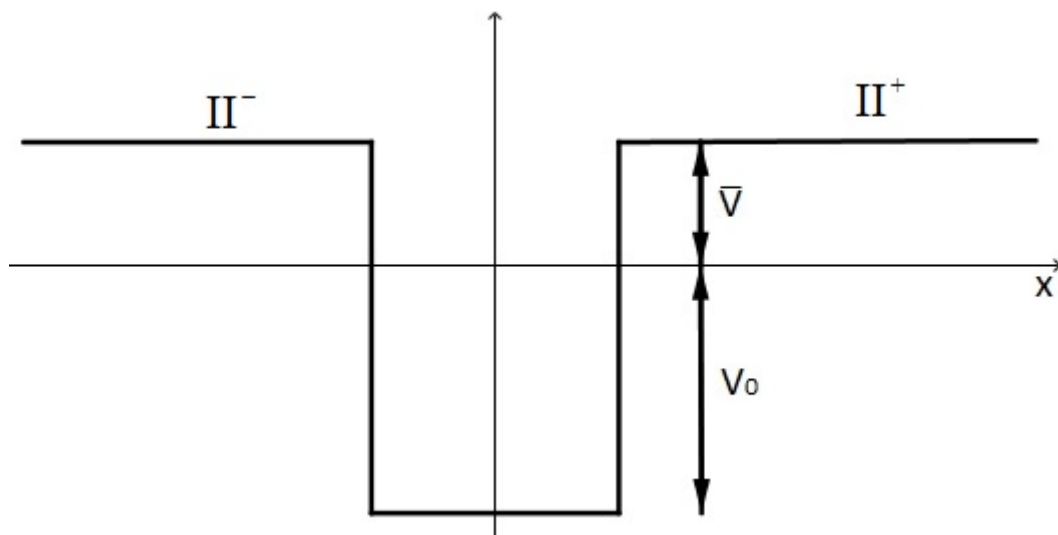


Figura 9.11: Supponiamo che anche fuori dalla buca il potenziale sia costante. Dividiamo nelle zone I, II<sup>+</sup> e II<sup>-</sup>.

Classicamente ci aspettiamo che la particella oscilli e non abbia modo di uscire, poiché il potenziale la attrae sempre. Semplifichiamo il problema assumendo che il potenziale sia quello in figura 9.11

Supponiamo ora che la particella abbia energia  $\mathcal{E}$ . Scriviamo le equazioni di Schrödinger per la zona I e II $^\pm$

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_I}{dx^2} + V_0 \Psi_I = \mathcal{E} \Psi_I \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_{II}}{dx^2} + \bar{V} \Psi_{II} = \mathcal{E} \Psi_{II} \end{cases}$$

Se la particella sta dentro allora  $\mathcal{E} \geq V_0$  e  $\mathcal{E} \leq \bar{V}$ . Se definiamo le costanti, entrambe positive

$$k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} - V_0) \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\bar{V} - \mathcal{E})$$

allora le equazioni diventano

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Psi_I}{dx^2} + = -k_1^2 \Psi_I \\ \frac{d^2 \Psi_{II}}{dx^2} + = k_2^2 \Psi_{II} \end{cases}$$

E le soluzioni sono

$$\begin{cases} \Psi_I = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \\ \Psi_{II^\pm} = C_\pm e^{k_2 x} + D_\pm e^{-k_2 x} \end{cases}$$

ove  $C_\pm$  e  $D_\pm$  dipendono anche dalla zona considerata (+ o -). Consideriamo ora i seguenti casi: se la particella si trova in  $x \rightarrow +\infty$  allora della funzione d'onda  $\Psi_{II+}$  è importante soltanto il primo termine; se però non fosse  $C_+ = 0$  allora la funzione tenderebbe all'infinito, ma ciò non è possibile perché deve essere normalizzata. Dunque imponiamo  $C_+ = 0$ . Allo stesso modo troviamo che, supponendo  $x \rightarrow -\infty$ ,  $D_- = 0$ . Allora riassumendo

$$\begin{cases} \Psi_I = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \\ \Psi_{II+} = D_+ e^{-k_2 x} \\ \Psi_{II-} = C_- e^{k_2 x} \end{cases}$$

Se vogliamo trovare le altre costanti possiamo imporre, per continuità negli estremi della buca

$$\begin{aligned} \Psi_{II-}(-R_0) &= \Psi_I(-R_0) & \Psi'_{II-}(-R_0) &= \Psi'_I(-R_0) \\ \Psi_{II+}(R_0) &= \Psi_I(R_0) & \Psi'_{II+}(R_0) &= \Psi'_I(R_0) \end{aligned}$$

Qualitativamente vediamo che la funzione d'onda è fatta nel seguente modo

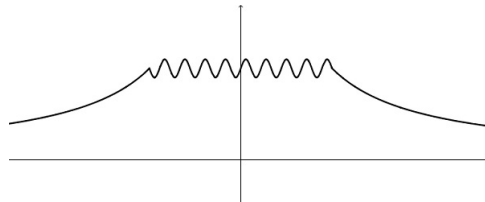


Figura 9.12:

Il fatto che la funzione d'onda non sia nulla nelle regioni classicamente proibite ci assicura che esiste la probabilità di trovare la particella in quelle regioni, il che giustifica il decadimento. Ora, il problema appena studiato è molto semplificato rispetto alla 9.10. Supponiamo che, nella regione di  $x > 0$ , il potenziale sia del tipo in figura 9.13

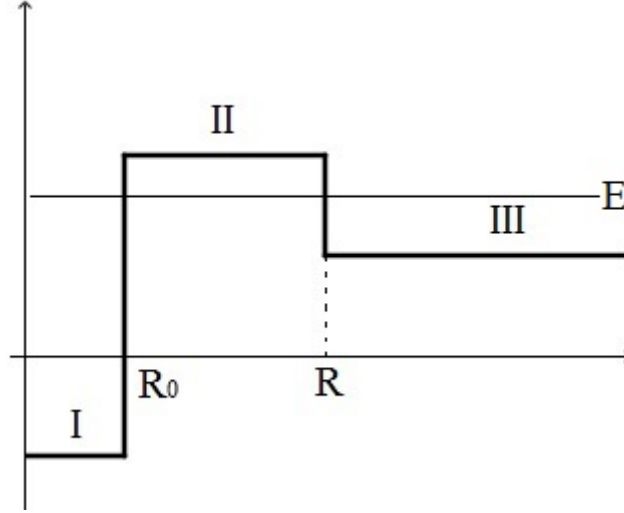


Figura 9.13: Chiamiamo  $R - R_0 = L$ . Chiamiamo  $\bar{V}$  la differenza di potenziale tra II e III. Chiamiamo invece  $V_0$  la differenza di potenziale tra I e III. Poniamo inoltre lo zero del potenziale sulla III.

Studiamo solo la regione delle  $x$  positive, supponendo che nelle  $x$  negative sia totalmente simmetrica. Supponiamo ancora  $V_0 < \mathcal{E} < V$ . I conti si svolgono in modo totalmente analogo, e troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} \Psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E} - V_0)} \\ \Psi_{II} = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} & k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\bar{V} - \mathcal{E})} \\ \Psi_{III} = Fe^{ik_3x} & k_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\mathcal{E}} \end{cases}$$

Dunque abbiamo la situazione in figura

Se ora imponiamo le condizioni di continuità per la funzione d'onda e la sua derivata

$$\Psi_I(R_0) = \Psi_{II}(R_0) \quad \Psi'_I(R_0) = \Psi'_{II}(R_0)$$

$$\Psi_{II}(R) = \Psi_{III}(R) \quad \Psi'_{II}(R) = \Psi'_{III}(R)$$

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ ik_1(A - B) = k_2(C - D) \\ Ce^{k_2R} + De^{-k_2R} = Fe^{ik_3R} \\ k_2(Ce^{k_2R} - De^{-k_2R}) = ik_3Fe^{ik_3R} \end{cases}$$

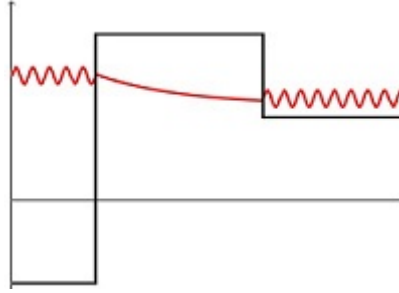


Figura 9.14: La particella oscilla nella buca e ha una certa probabilità di uscire, e dopo essere uscita si propaga con una funzione d'onda  $\Psi_{III}$ .

Facendo il rapporto membro a membro tra la terza e la quarta, e considerando che sperimentalmente  $k_3 \ll k_2$  troviamo<sup>16</sup>

$$C = \frac{k_2 + ik_3}{k_2 - ik_3} D e^{-2k_2 R} \simeq D e^{-2k_2 R}$$

Ora dalla terza uguaglianza troviamo che

$$F = 2D e^{ik_3 - k_2} R \simeq 2D e^{-k_2 R}$$

Dunque il modulo quadro della  $\Psi_{III}$ , che è proporzionale alla probabilità di trovare la particella in quella regione è

$$|\Psi_{III}|^2 = 4|D|^2 e^{-2k_2 R}$$

Si vede dunque che, più è piccolo  $k_2$ , ossia più l'energia della particella è vicina al valore del potenziale che la blocca nel buco, abbiamo più probabilità di trovare la particella nella regione classicamente proibita.

In modo da rendere più tangibile lo studio, riporto qualche dato sperimentale. La frequenza di oscillazione<sup>17</sup> della particella dentro il nucleo è  $\nu = 10^{21} s^{-1}$ . La probabilità che la particella esca fuori in un urto con la parete è di  $10^{-36}$ . Dunque la probabilità di attraversamento della parete ogni secondo è  $10^{21} \cdot 10^{-36} = 10^{-15}$ . Questo ci dice che una volta ogni  $10^{15} s \simeq 10^8$  anni una particella  $\alpha$  esce dal nucleo dell'uranio, ossia il suo tempo di vita medio. Il fatto che la probabilità dipenda da  $k_2$  ci dice che anche una piccola variazione di questa, può comportare delle grandi differenze nei tempi di vita.

<sup>16</sup>Infatti troviamo che il valore  $k_2$  è semplicemente poco spostato dall'asse reale se  $k_3$  è piccolo.

<sup>17</sup>Quante volte sbatte sulla parete del buco al secondo.

## 9.5 Lo spin

Gli indizi che portarono all'ipotesi che l'atomo avesse un altro momento angolare oltre quello canonico (lo **spin**) sono provenuti dall'esperimento di Stern-Gerlach e un'analisi più approfondita dello spettro di emissione degli atomi.

Stern e Gerlach spararono un fascio di atomi di argento avente momento magnetico  $\vec{\mu}$  in un magnete come quello rappresentato in figura 9.15



Figura 9.15:

Il campo è diretto in direzione  $\hat{z}$  (verticale), ma è disomogeneo: per il potere delle punte infatti cresce andando dal basso verso l'alto, quindi  $\frac{\partial B}{\partial z} > 0$ . Sappiamo che il momento magnetico dell'atomo e il momento angolare sono legati dalla relazione

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{L}$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone. La forza agente sull'atomo, visto come un dipolo magnetico di momento  $\vec{\mu}$  è

$$F_z = \nabla \left( \vec{\mu} \cdot \vec{B} \right)_z$$

E se supponiamo che il campo vari soltanto in direzione  $\hat{z}$

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{e}{2m} L_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

Se ora ricordiamo la quantizzazione di Bohr-Sommerfeld, ossia che la componente  $L_z$  è quantizzata in un numero dispari di valori, ci aspettiamo che il fascio venga splittato in numero dispari. Invece si riscontra che il fascio viene diviso soltanto in due, decisamente non dispari.

Raffinando invece la spettroscopia, nell'emissione di luce dovuta al salto quantico da un orbitale a uno con minor energia, vediamo che la riga associata al salto non è una, ma bensì due.

Nel 1925 Krönig<sup>18</sup>, Goudsmit e Uhlenbeck<sup>19</sup> ebbero la stessa idea: le due anomalie sono spiegate se esistesse un altro momento angolare, dovuto alla rotazione dell'elettrone

<sup>18</sup>studente di Pauli

<sup>19</sup>studenti di Ehrenfest



su se stesso; questo momento angolare, chiamato **spin**, è quantizzato in modo tale che possa assumere soltanto i valori  $+\frac{1}{2}\hbar$  e  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Entrambi riscontrarono che l'ipotesi ha un buon accordo con i dati sperimentali, ma Pauli si pone contro la teoria. Questo perché se lo spin fosse dovuto alla rotazione dell'elettrone su se stesso, allora l'elettrone ruoterebbe a una velocità maggiore di quella della luce. Se calcoliamo il raggio classico dell'elettrone

$$mc^2 = \frac{e^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{e^2}{mc^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Se schematizziamo l'elettrone come una sfera di quel raggio allora

$$\frac{\hbar}{2} = I\omega = \frac{2}{5}mvr \quad \Rightarrow \quad v = \frac{5\hbar}{4mr} = 4.4 \cdot 10^{11} \text{ m/s}$$

Nel 1926 Schrödinger tenta di spiegare la quantizzazione di Bohr, e la situazione per lo spin peggiora. Infatti, se calcoliamo una componente del momento utilizzando la formula  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$L_3 = x_1p_2 - x_2p_1 \quad \longrightarrow \quad \hat{L}_3 = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1 = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial y} + i\hbar y \frac{\partial}{\partial x}$$

Se ora consideriamo le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Per trovare come si scrive  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  dobbiamo applicare la regola della derivata della composta

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} = -r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

Il che porge

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Allora riconosciamo nell'operatore  $\hat{L}_3$  la stessa espressione e

$$\hat{L}_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Se vogliamo trovare i valori della proiezione del momento, allora dobbiamo risolvere l'equazione agli autovalori

$$\hat{L}_3 \Psi(x) = \lambda \Psi \quad \Rightarrow \quad -i\hbar \frac{\partial \Psi(\varphi)}{\partial \varphi} = \lambda \Psi(\varphi)$$

Siccome  $\varphi$  è un angolo, allora  $\Psi(0) = \Psi(2\pi)$  poiché la funzione d'onda è monodroma. La soluzione è

$$\Psi(\varphi) = ce^{i\frac{\lambda}{\hbar}\varphi}$$

e imponendo la monodromia

$$1 = e^{i\frac{\lambda}{\hbar}2\pi} \Rightarrow \lambda = \hbar m \quad m \in \mathbb{Z}$$

Dalla monodromia della funzione discende direttamente che il momento angolare può avere una direzione quantizzata in valori interi della costante di Planck, il che contraddice l'ipotesi di esistenza dello spin. Come può esistere un momento angolare con proiezioni semi-interi?

Rianalizziamo la struttura delle componenti del momento angolare: calcoliamo le parentesi di Poisson e utilizziamo la regola di quantizzazione canonica

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k \Rightarrow [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$$

E utilizzando 9.13 troviamo che

$$\left(\Delta \hat{L}_i\right)_\Psi \left(\Delta \hat{L}_k\right)_\Psi \geq \frac{\hbar}{2} \varepsilon_{ijk} |\langle \hat{L}_k \rangle|$$

Abbiamo quindi trovato una indeterminazione nel misurare simultaneamente due componenti del momento angolare: questo risolve il problema di chiedersi quale componente del momento fosse quantizzata. Se osserviamo una quantizzazione in una direzione, per il principio di indeterminazione, non possiamo sapere cosa accade nelle altre direzioni (almeno simultaneamente). Dunque il momento angolare risulti quantizzato in una direzione arbitraria non crea più alcun problema, poiché non sappiamo cosa accade nelle altre direzioni. Allora si è ristabilita la simmetria sferica, non c'è alcuna direzione privilegiata. Se ora consideriamo l'equazione agli autovalori per  $\hat{L}^2$ , ci aspettiamo che, per la quantizzazione di Bohr, essi siano  $n^2 \hbar^2$ . Invece si dimostra che gli autovalori sono  $\ell(\ell+1)\hbar$ . Questo risolve un altro problema: se consideriamo la figura 9.6, vediamo che era possibile avere due elettroni che stanno sullo stesso piano (quello con proiezione  $2\hbar$  e  $-2\hbar$ ). Invece se la quantizzazione corretta è

$$|L| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$$

il numero delle proiezioni possibili è ancora lo stesso ( $2\ell+1$ ), ma stavolta non stanno tutte sullo stesso piano! Se infatti  $\ell=2$ , il modulo del momento è  $\sqrt{6}\hbar$  e le proiezioni sull'asse verticale diposte come in figura 9.16

Nel 1927 Pauli ipotizza che il più generico momento angolare  $\hat{J}$  sia caratterizzato soltanto dal commutatore

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

Allora i possibili autovalori per  $\hat{J}^2$  sono  $\hbar^2 s(s+1)$ , mentre per  $\hat{J}_3$  sono  $\hbar s_3$ . ma stavolta si mostra che  $s$  e  $s_3$  sono numeri semi interi. Questo ci dice che l'idea dello spin ha un senso, semplicemente non è un momento angolare paragonabile a quello canonico. Volendo riassumere

- $\ell$  è il **numero quantico secondario**, che ci dà il valore del modulo del momento angolare atomico.
- $m$  è il **numero quantico magnetico**, che determina i valori della proiezione del momento angolare atomico. In questo caso abbiamo  $2\ell+1$  valori della proiezione, che sono dispari poiché  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

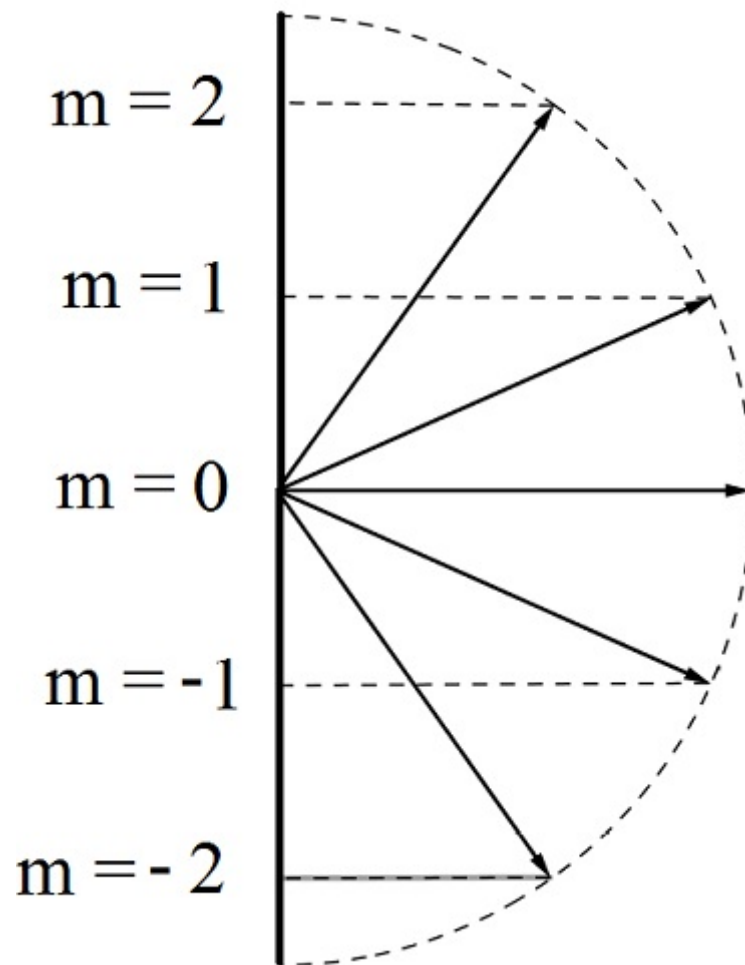


Figura 9.16: In questo modo non è più possibile che le ipotetiche orbite stiano sullo stesso piano.

Avendo invece  $s, s_3 \in \mathbb{Z}$ , allora il numero delle proiezioni è ancora  $2s + 1$ , ma stavolta è un numero pari. Questo risolve il problema dei doppietti spettrali e dell'esperienza di Stern e Gerlach.

Abbiamo però visto che imporre l'equivalenza tra 0 e  $2\pi$  implica che il numero quantico sia appartenente agli interi. Questo ci dice che lo spin non è un momento angolare nello spazio ordinario, ma in un altro (detto **spazio di spin**) nel quale l'equivalenza è tra 0 e  $4\pi$ . È naturale pensare che invece per rotazioni di  $2\pi$

$$\Psi(\vec{x}, s_3) \xrightarrow{\text{rotazione di } 2\pi} -\Psi(\vec{x}, s_3)$$

ma questo non cambia lo stato, poiché ricordiamo che è definito a meno di costanti.

Per fare degli esempi, le particelle con  $s = \frac{1}{2}$  sono elettroni, neutroni, protoni. Invece il bosone di Higgs ha spin nullo, mentre i fotoni hanno spin unitario<sup>20</sup>.

In meccanica quantistica si definisce dunque il più generale **momento angolare totale**

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

Possiamo vedere l'esperimento di Stern e Gerlach come un caso in cui avevamo  $\ell = 0$  e  $s_3 = \pm\frac{1}{2}$ , dunque abbiamo effettivamente due fasci come è risultato.

## 9.6 Particelle identiche

Siamo quindi giunti a una descrizione dello stato quantico di un elettrone nell'atomo tramite quattro numeri quantici

- **n** o numero quantico principale. Indica l'energia dell'elettrone e dunque l'orbita;
- **ℓ** o numero quantico secondario. Indica il valore del modulo del momento angolare. È compreso tra 0 e  $n - 1$ . Inoltre indica in quale orbitale (s,p,d,f) l'elettrone si trova;
- **m** o numero quantico magnetico. Indica il valore della proiezione del momento angolare quantizzata. È compreso tra  $-\ell$  e  $\ell$ ;
- **s<sub>3</sub>** o numero quantico di spin. Indica il valore della proiezione dello spin, e per l'elettrone può valere  $\pm\frac{1}{2}$ .

Un elettrone si identifica univocamente con la combinazione dei quattro numeri quantici. Consideriamo allora un elettrone con  $n = 1$ ,  $\ell = 0$ ,  $m = 0$ . Allora possiamo avere soltanto 2 elettroni con questi numeri quantici. La coppia può dunque avere spin opposto, un elettrone con  $+\frac{1}{2}$  e l'altro  $-\frac{1}{2}$ , oppure spin nella stessa direzione. Mediante studi spettroscopici Pauli nota che le righe spettrali corrispondenti alle coppie di elettroni con spin uguale non ci sono: ossia mancano tutte le righe spettrali predette nel caso di due elettroni con i quattro numeri quantici uguali. Enuncia così il **principio di esclusione di Pauli**: *due elettroni sono indistinguibili, cosicché due insiemi di numeri quantici che si ottengono scambiando due elettroni rappresentano lo stesso stato. Inoltre non sono ammessi stati di due elettroni con gli stessi numeri quantici.*

<sup>20</sup>Ci si riferisce a  $s$  come il valore dello spin.

Da questo deriva la nota disposizione della configurazione elettronica imparata nei corsi di chimica. Vediamo l'equazione di Schrödinger per due elettroni. Essa sarà della forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \hat{H}(\vec{x}, -i\hbar \nabla) \Psi(\vec{x}, t)$$

Ora sappiamo che l'hamiltoniana di un sistema di due particelle è della forma  $H(q_1, p_1, q_2, p_2)$ , e questo ci suggerisce che l'equazione sarà della forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \hat{H}(\vec{x}_1, -i\hbar \nabla_{(x_1)}, \vec{x}_2, -i\hbar \nabla_{(x_2)}) \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$$

La funzione d'onda sarà definita in  $\mathbb{R}^6$ , non in  $\mathbb{R}^3$  dove gli elettroni effettivamente si muovono. Può succedere che la funzione d'onda abbia la proprietà di avere i contributi separati e scriversi

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \Psi_1(\vec{x}_1) \Psi_2(\vec{x}_2)$$

Ma in generale non accade, e gli stati delle due particelle sono correlati. Gli stati di questo tipo si chiamano **entangled**, e conseguenza di questi sono ad esempio il teletrasporto quantistico e la crittografia quantistica. Dal punto di vista matematico questa è una semplice conseguenza della natura vettoriale della funzione d'onda. Consideriamo ad esempio due funzioni,  $\Psi$  e  $\varphi$  che possono essere scritte come prodotto dei contributi dalla particella 1 e 2. Allora, siccome lo spazio è vettoriale, anche la somma sarà dentro lo spazio

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \Psi_1(\vec{x}_1) \Psi_2(\vec{x}_2) + \varphi_1(\vec{x}_1) \varphi_2(\vec{x}_2)$$

e questa evidentemente non si può scrivere separando i contributi. Dunque non è detto che uno stato con due particelle sia descrivibile con le singole particelle, ma bisogna studiare le loro correlazioni.

È interessante studiare cosa accade nel caso di due particelle identiche, ossia con le stesse **proprietà intrinseche**, ossia quelle indipendenti dallo stato, come la carica, la massa e lo spin. In meccanica classica due particelle, seppur identiche, sono distinguibili: posso chiamarle "particella 1" e "particella 2" e avere sempre ben distinte le loro posizioni e momenti,  $q_1, p_1$  e  $q_2, p_2$ . Inoltre la loro individualità permane al variare del tempo, anche se interagiscono. Questo perché nello spazio delle fasi classico le loro traiettorie non si intersecano mai per l'unicità delle soluzioni delle equazioni di Hamilton.

In meccanica quantistica però non esistono traiettorie nello spazio delle fasi. La massima informazione è data dalla funzione d'onda in un certo istante. Magari a un certo tempo le funzioni d'onda hanno supporto disgiunto, dunque possiamo distinguerle. Ma se al variare del tempo i supporti si sovrappongono allora non possiamo più distinguere le due particelle. Questo si vede subito nella camera a bolle: due serie di bolle che si sovrappongono non sono univocamente determinate (vedi figura 9.17).

Siccome sono indistinguibili, uno scambio tra le particelle deve riprodurre lo stesso stato. Questo vuol dire che gli stati con le particelle scambiate corrispondono al prodotto per un fattore di fase  $e^{i\alpha}$ , che appunto abbiamo visto non varia lo stato del sistema.

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = e^{i\alpha} \Psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$

Un secondo scambio riporta le coordinate nella posizione originale

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = e^{i\alpha} \Psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = e^{i2\alpha} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

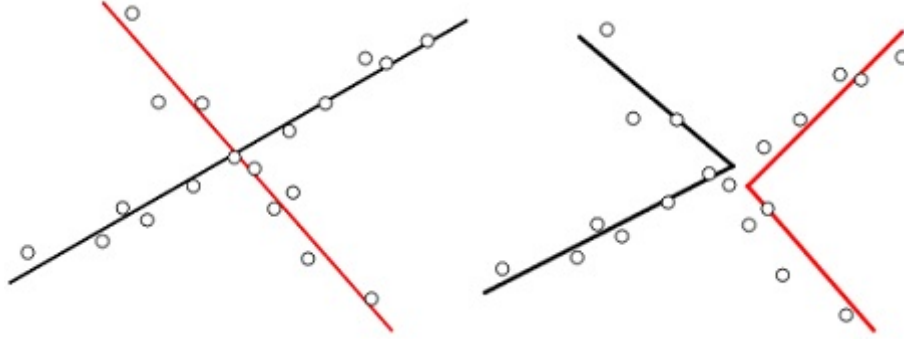


Figura 9.17: Nella camera a bolle entrambe le traiettorie sono ugualmente possibili, dunque non si possono distinguere.

quindi

$$e^{i2\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \pi$$

Nel caso in cui  $\alpha = 0$ , allora la funzione d'onda non cambia per scambio e si dice **simmetrica**; nel caso in cui  $\alpha = \pi$  allora la funzione d'onda è detta **anti-simmetrica**.

Data una  $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  senza simmetria e normalizzata, allora ne possiamo ottenere una simmetrica e una anti-simmetrica<sup>21</sup>

$$\Psi_s(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \Psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)}{\sqrt{2}}$$

$$\Psi_a(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) - \Psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)}{\sqrt{2}}$$

Chiaramente si ha che tutte le funzioni d'onda degli stati di un sistema di due particelle hanno anche la stessa simmetria, o non varrebbe il principio di sovrapposizione.

Volendo generalizzare al caso in cui si hanno  $N$  particelle con spin, la funzione d'onda è

$$\Psi(\vec{x}_1, s_1, \vec{x}_2, s_2, \dots, \vec{x}_N, s_N)$$

allora si ha la seguente classificazione

- se è simmetrica (ossia uguale per scambio di  $\vec{x}_j, s_j$  e  $\vec{x}_i, s_i$ ) allora le particelle sono dette **bosoni** e obbediscono alla statistica di Bose-Einstein. Da una funzione  $\Psi$  generica (normalizzata) senza simmetria se ne può ottenere una simmetrica per *simmetrizzazione*. Sia  $\Sigma_N$  il gruppo delle permutazioni di  $N$  elementi e sia  $\pi \in \Sigma_N$ . Allora

$$\Psi_s = \sum_{\pi \in \Sigma_N} \frac{\Psi(\vec{x}_{\pi(1)}, s_{\pi(1)}, \vec{x}_{\pi(2)}, s_{\pi(2)}, \dots, \vec{x}_{\pi(N)}, s_{\pi(N)})}{\sqrt{N!}}$$

In pratica abbiamo sommato le  $\Psi$  con tutti i possibili scambi, che sono  $N!$ .

- se è antisimmetrica (ossia opposta per scambio di  $\hat{x}_j, s_j$  e  $\hat{x}_i, s_i$ ) allora le particelle sono dette **fermioni** e obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac. Da una funzione

<sup>21</sup>Entrambe normalizzate.

$\Psi$  generica (normalizzata) senza simmetria se ne può ottenere una anti-simmetrica per *anti-simmetrizzazione*. Allora con la stessa notazione utilizzata sopra

$$\Psi_a = \sum_{\pi \in \Sigma_N} (-1)^{\# \pi} \frac{\Psi(\vec{x}_{\pi(1)}, s_{\pi(1)}, \vec{x}_{\pi(2)}, s_{\pi(2)}, \dots, \vec{x}_{\pi(N)}, s_{\pi(N)})}{\sqrt{N!}}$$

ove  $\# \pi$  è il numero di scambi effettuati nella permutazione  $\pi$ .

Se ho dunque pensiamo agli elettroni in due tavoli non ha senso chiedersi se un dato elettrone sia nel tavolo 1 o 2. È lecito chiedersi qualcosa che non faccia entrare in gioco l'individualità degli elettroni.

Questo effetto chiaramente a distanza non si vede. Supponiamo di considerare un elettrone con  $\Psi_1(\vec{x}_1)$  nel tavolo 1 e un altro elettrone con  $\Psi_2(\vec{x}_2)$  nel tavolo 2. Supponiamo inoltre che le due funzioni d'onda siano disgiunte, dunque non hanno supporto sull'altro tavolo, rispettivamente.

Consideriamo ora un'osservabile (operatore) definito come

$$\hat{A}\Psi_i(\vec{x}_i) \rightarrow \phi_i(\vec{x}_i)$$

e che agisca solo localmente, ossia che anche  $\phi_1(\vec{x}_1)$  e  $\phi_2(\vec{x}_2)$  abbiano supporto disgiunto. Inizialmente i due elettroni non hanno alcuna correlazione, dunque è lecito supporre che la funzione d'onda che descrive lo stato iniziale sia

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \Psi_1(\vec{x}_1)\Psi_2(\vec{x}_2)$$

e anti-simmetrizzando (supponendo che sia normalizzata)

$$\Psi_a(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\Psi_1(\vec{x}_1)\Psi_2(\vec{x}_2) - \Psi_1(\vec{x}_2)\Psi_2(\vec{x}_1)}{\sqrt{2}}$$

Calcoliamo il valor medio dell'osservabile  $\hat{A}$ .

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_{\Psi_s} &= \int d^3x_1 d^3x_2 \Psi_a^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \hat{A} \Psi_a(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 (\Psi_1^*(\vec{x}_1)\Psi_2^*(\vec{x}_2) - \Psi_1^*(\vec{x}_2)\Psi_2^*(\vec{x}_1)) \hat{A} (\Psi_1(\vec{x}_1)\Psi_2(\vec{x}_2) - \Psi_1(\vec{x}_2)\Psi_2(\vec{x}_1)) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 (\Psi_1^*(\vec{x}_1)\Psi_2^*(\vec{x}_2) - \Psi_1^*(\vec{x}_2)\Psi_2^*(\vec{x}_1)) (\phi_1(\vec{x}_1)\phi_2(\vec{x}_2) - \phi_1(\vec{x}_2)\phi_2(\vec{x}_1)) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \Psi_1^*(\vec{x}_1)\Psi_2^*(\vec{x}_2)\phi_1(\vec{x}_1)\phi_2(\vec{x}_2) - \Psi_1^*(\vec{x}_1)\Psi_2^*(\vec{x}_2)\phi_1(\vec{x}_2)\phi_2(\vec{x}_1) - \\ &\quad - \Psi_1^*(\vec{x}_2)\Psi_2^*(\vec{x}_1)\phi_1(\vec{x}_1)\phi_2(\vec{x}_2) + \Psi_1^*(\vec{x}_2)\Psi_2^*(\vec{x}_1)\phi_1(\vec{x}_2)\phi_2(\vec{x}_1) \end{aligned}$$

ora, i termini ove appaiono  $\Psi_1(\vec{x}_2)$ ,  $\Psi_2(\vec{x}_1)$ ,  $\phi_1(\vec{x}_2)$  e  $\phi_2(\vec{x}_1)$  sono tutti nulli poiché abbiamo detto che le funzioni d'onda hanno supporto disgiunto, dunque la funzione d'onda sul

tavolo 1 non ha supporto sul tavolo 2. Allora<sup>22</sup>

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle_{\Psi_s} &= \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \Psi_1^*(\vec{x}_1) \Psi_2^*(\vec{x}_2) \phi_1(\vec{x}_1) \phi_2(\vec{x}_2) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \Psi_1^*(\vec{x}_1) \Psi_2^*(\vec{x}_2) \hat{A} \Psi_1(\vec{x}_1) \Psi_2(\vec{x}_2) \\
 &= \int d^3x_1 d^3x_2 \Psi^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \hat{A} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)
 \end{aligned}$$

Dunque è come se non contasse aver fatto la simmetrizzazione e in questo caso non c'è correlazione tra le particelle che influenzi il valor medio. Questo ci dice che appunto gli effetti, se le particelle sono distanti, non si vedono.

Una verifica diretta della indistinguibilità si può ottenere studiando fenomeni di scattering, come l'esperimento di Rutherford. Abbiamo visto che Born scrive la funzione d'onda come segue

$$\Psi(\vec{x}) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Immaginiamo ora 2 particelle identiche che si scontrano (elasticamente) frontalmente

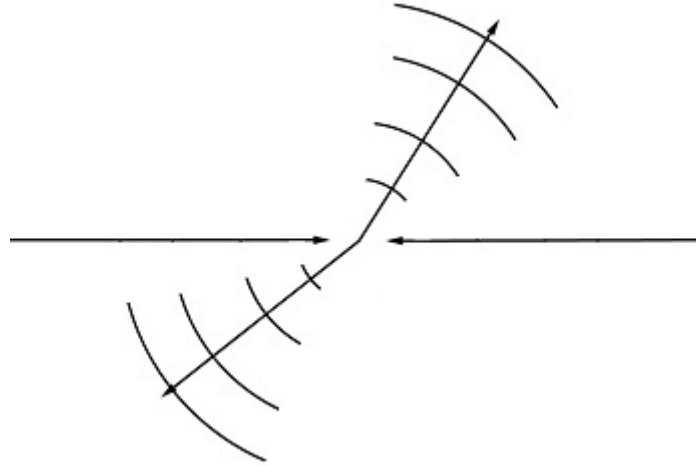


Figura 9.18: Le due particelle prima dell'urto viaggiano in direzioni opposte sull'asse  $z$ . Dopo è analogo all'esperimento di Rutherford, possiamo vedere le particelle come onde diffuse in una direzione, ma non sappiamo più riconoscerle.

Se sono indistinguibili, data una funzione d'onda  $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  generica, dobbiamo simmetrizzare (o anti-simmetrizzare)

$$\Psi_{s/a}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \pm \Psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$

<sup>22</sup>Nell'ultimo passaggio non ho idea del perché sparisca  $\frac{1}{2}$ , non ho ben capito i passaggi che ha fatto Marchetti. L'idea che mi è venuta per risolvere la questione è la seguente: se spezziamo l'integrale di sopra in quattro addendi, possiamo cambiare variabile a  $\int \Psi_1^*(\vec{x}_2) \Psi_2^*(\vec{x}_1) \phi_1(\vec{x}_2) \phi_2(\vec{x}_1)$  mandando  $\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2$ . In questo modo questo termine è uguale al primo  $\int \Psi_1^*(\vec{x}_1) \Psi_2^*(\vec{x}_2) \phi_1(\vec{x}_1) \phi_2(\vec{x}_2)$  mentre gli altri in qualunque modo si maneggino sono sempre nulli. In questo modo ci sarebbe contributo doppio che si semplifica con il fattore  $\frac{1}{2}$ , ma non sono sicuro che sia corretto farlo.



Possiamo cambiare coordinate. Utilizziamo la coordinata del centro di massa e la posizione relativa tra le particelle

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2} \\ \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{cases}$$

Ora, la coordinata  $\vec{R}$  è invariante per scambi, mentre la coordinata  $\vec{x}$  è anti-simmetrica per scambio. Allora la funzione d'onda scritte in queste coordinate può essere soltanto del tipo

$$\Psi_{s/a}(\vec{R}, \vec{x}) = \Psi_{cm}(\vec{R}) \tilde{\Psi}(\vec{x})$$

la parte dipendente da  $\vec{R}$  non varia per scambi, mentre quello che fa la differenza è il secondo termine. Ci serve una funzione  $\tilde{\Psi}(\vec{x})$  che sia pari se sono bosoni e dispari se sono fermioni. Possiamo raggiungere lo scopo con la seguente funzione d'onda

$$\Psi_{s/a}(\vec{R}, \vec{x}) = \Psi_{cm}(\vec{R}) [\Psi(\vec{x}) \pm \Psi(-\vec{x})]$$

ove la  $\Psi(\vec{x})$  è proprio quella data da Born. In questo sistema le particelle inoltre fuggono in direzioni opposte, dunque se per una delle particelle l'angolo è  $\theta$ , per l'altra è  $\pi - \theta$ . Quindi

$$\Psi_{s/a} = \Psi_{cm}(\vec{R}) \left[ e^{ikz} \pm e^{-ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} (f(\theta) \pm f(\pi - \theta)) \right]$$

Se ora calcoliamo la sezione d'urto riseguendo i calcoli effettuati per trovare quella di Born, il termine  $\Psi_{cm}(\vec{R})$  è una costante per le derivate spaziali se supponiamo che sia fermo inizialmente. Dunque ci troviamo davanti una funzione dello stesso tipo di quella di Born, quindi

$$\sigma_{\pm} \simeq |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2$$

a meno di costanti. Scegliendo di guardare a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  troviamo che la probabilità è aumentata rispetto che nel caso di una particella, quando abbiamo dei bosoni

$$\sigma_+ = 4\sigma_{Born}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

invece è identicamente nulla nel caso dei fermioni. Da questo si vede che non possiamo distinguere le particelle, ma possiamo capire che tipo di particelle sono tramite un esperimento del genere. Da questo si trova anche che i bosoni effettivamente hanno spin intero, mentre i fermioni spin semi intero.

L'antisimmetria dei fermioni porta alla verifica del principio di esclusione di Pauli. Ipotizziamo che sia falso, e dunque due fermioni identici hanno gli stessi numeri quantici, dunque stesso  $\vec{x}$  e  $s$ . Allora un sistema di  $n$  fermioni ha una funzione d'onda completamente antisimmetrica

$$\Psi_a(\vec{x}_1, s_1, \dots, \vec{x}_i, s_i, \dots, \vec{x}_j, s_j, \vec{x}_n, s_n)$$

Se ora scambio  $\vec{x}_i, s_i$  con  $\vec{x}_j, s_j$

$$\Psi_a(\vec{x}_1, s_1, \dots, \vec{x}_i, s_i, \dots, \vec{x}_j, s_j, \vec{x}_n, s_n) = -\Psi_a(\vec{x}_1, s_1, \dots, \vec{x}_j, s_j, \dots, \vec{x}_i, s_i, \vec{x}_n, s_n)$$

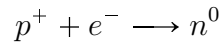
e per assurdo supponiamo che  $\vec{x}_i, s_i = \vec{x}_j, s_j$

$$\Psi_a(\vec{x}_1, s_1, \dots, \vec{x}_i, s_i, \dots, \vec{x}_j, s_j, \vec{x}_n, s_n) = -\Psi_a(\vec{x}_1, s_1, \dots, \vec{x}_i, s_i, \dots, \vec{x}_j, s_j, \vec{x}_n, s_n)$$

La funzione d'onda sarebbe uguale alla sua opposta, dunque non può essere che identicamente nulla, quindi il sistema non esiste.

Diamo ora un accenno di giustificazione agli effetti macroscopici citati nell'introduzione

- *incompenetrabilità dei corpi*: sappiamo che la distanza tra gli atomi è dell'ordine di  $10^{-10}$  m (lo stesso ordine del raggio atomico), ma la "materia" è concentrata nel nucleo<sup>23</sup>, che ha raggio di  $10^{-15}$  m. Se i corpi si potessero attraversare dunque dovrebbero passare nello spazio vuoto tra le "orbite" degli elettroni e il nucleo. Ma così due elettroni avrebbero gli stessi numeri quantici, che non è possibile per il principio di esclusione. Quindi per il principio di Pauli quello che conta degli atomi sono gli orbitali, non solo il nucleo dove è concentrata la materia. Diverso è invece il caso delle stelle di neutroni, in cui la forza gravitazionale è così intensa da far collassare gli elettroni nel nucleo, e far avvenire la reazione



in questo caso ora il principio ci assicura che i neutroni non collassino con se stessi, ma ora contano solo i nuclei, ossia ordini di grandezza di  $10^{-15}$  m perché non ci sono più orbitali. Dunque se una stella di neutroni avesse la massa del Sole, che ha raggio  $10^6$  km, avrebbe un raggio di 10 km.

- la *stabilità dei colori* e anche della materia è garantita dalla quantizzazione dell'energia, poiché per far saltare elettroni da un livello a un altro serve molta energia, e non bastano delle fonti "casuali" che potrebbero far scattare il processo random.
- i *LASER*, ossia fasci di luce coerente molto collimati e poco diffusi, sono possibili per la natura bosonica dei fotoni: essi sono liberi di affollare uno stato quantico in grande numero. Dunque posso prendere quanti fotoni mi pare alla stessa lunghezza d'onda
- la *superconduttività* è sempre legata alla proprietà dei bosoni di poter affollare uno stato quantico, e in particolare di poter attraversare la materia. In un materiale sufficientemente freddo, vicino allo zero assoluto, il fatto che un elettrone viaggi tra gli atomi del materiale crea un accumulo di carica positiva sulla sua scia, poiché attrae i protoni negli atomi. A questo punto un altro elettrone si muove verso l'accumulo di carica positiva, e si crea un legame tra i due elettroni se hanno anche spin opposto: in questo modo ho "creato" un bosone, che posso gestire come voglio e con una differenza di potenziale farlo muovere. Il fatto che possa attraversare la materia mi porta a una resistenza del materiale praticamente nulla alla corrente.

---

<sup>23</sup>Protoni e neutroni.